

Die Lösung einiger phyllotaktischen Probleme mittels einer diophantischen Gleichung.

VON EDMUND KERBER.

(Vorgelegt von Hrn. SCHWENDENER am 13. April [s. oben S. 393].)

Hierzu Taf. VIII.

Vorbemerkung von S. SCHWENDENER.

In meiner Darstellung der Verschiebungen, welche die seitlichen Organe durch den gegenseitigen Druck erfahren (Mechanische Theorie der Blattstellungen, S. 12), habe ich den Versuch gemacht, die Mechanik dieser Verschiebungen zu begründen und die Grösse der Divergenzänderungen für eine Reihe einfacherer Fälle durch genaue Berechnung der vorkommenden Maxima und Minima, sowie gewisser mittlerer Werthe, zu bestimmen. Die Methode, die ich hierbei anwandte, war eine rein geometrische; sie bot allerdings den Vortheil, dass sie von der üblichen Construction spiraliger Stellungen ausging und nur ganz elementare mathematische Kenntnisse voraussetzte, war aber insofern unbequem, als jedes einzelne Stellungsverhältniss besonders construirt und berechnet werden musste. Einige Verallgemeinerungen, die ich seitdem durchgeführt habe, sind nicht veröffentlicht.

Die nachstehende Mittheilung des Hrn. KERBER bildet nun gerade mit Rücksicht auf solche Berechnungen, die auf diesem Gebiete nicht zu umgehen sind, eine erwünschte Ergänzung meiner Darlegungen. Dieselbe enthält nämlich eine allgemeine Formel, in welche man bloss die für einen concreten Fall gegebenen Werthe einzusetzen hat, um die gewünschte Divergenz zu erhalten. Nach dieser Formel hat der Verfasser die in meiner Theorie der Blattstellungen veröffentlichten Tabellen nachgerechnet, und ich bemerke ausdrücklich, dass seine Ziffern auch in den wenigen Fällen, wo sie von den meinigen etwas abweichen, richtig sind. — Bezüglich der weiteren phyllotaktischen Fragen, auf welche die Mittheilung noch eingeht, verweise ich auf den nun folgenden Text derselben.

Denkt man sich eine Anzahl von Insertionen auf einer cylindrischen Oberfläche nach allen Richtungen symmetrisch vertheilt, so lässt sich aus der Gruppierung der Insertionen, welche auf zwei einzelnen correspondirenden Schrägzeilen zur Erscheinung gelangt, trigonometrisch die Divergenz des Stellungsverhältnisses berechnen. Zu diesem

Behufe müssen indess zuvor einige mit der Numerirung der Insertionen zusammenhängende Fragen erledigt werden.

I. Numerirungsprincipien.

Es sei in Fig. 1 ein spiralisches Stellungsverhältniss dargestellt, in welchem sich zwei Zeilensysteme, deren Coordinationszahlen die relativen Primzahlen a und b seien, unter einem Winkel ϕ kreuzen. Die Insertion O ist durch die Punkte A und B bezeichnet. Ist $a < b$, und steigen die a^{er} Zeilen von links nach rechts aufwärts, so giebt es also in dieser Richtung weniger Zeilen als in der entgegengesetzten, in welcher die b^{er} Zeilen sich erheben. Steigt man in den beiden durch die Insertion O gehenden Zeilen aufwärts bis zum ersten gemeinsamen Kreuzungspunkte C , so muss in demselben diejenige Insertion liegen, welche bei einer fortlaufenden Numerirung der auf der Grundspirale auf einander folgenden Insertionen die Nummer $a \cdot b$ erhält.¹ Im Punkte F liege die Insertion I . Die beiden Paare gegenläufiger Parastichen, welche durch die Insertionen O und I gehen, schneiden sich oberhalb zum ersten Mal in G und H . Es sei x die Zahl der Schritte, die man beim Aufsteigen von A bis G zu machen hat, y die Schrittzahl zwischen F und G , ξ die entsprechende zwischen B und H , und η diejenige zwischen F und H : so werden die Nummern der in den Punkten G und H gelegenen Insertionen durch die Gleichungen bestimmt:

$$x \cdot a = y \cdot b + 1 \dots\dots\dots (1)$$

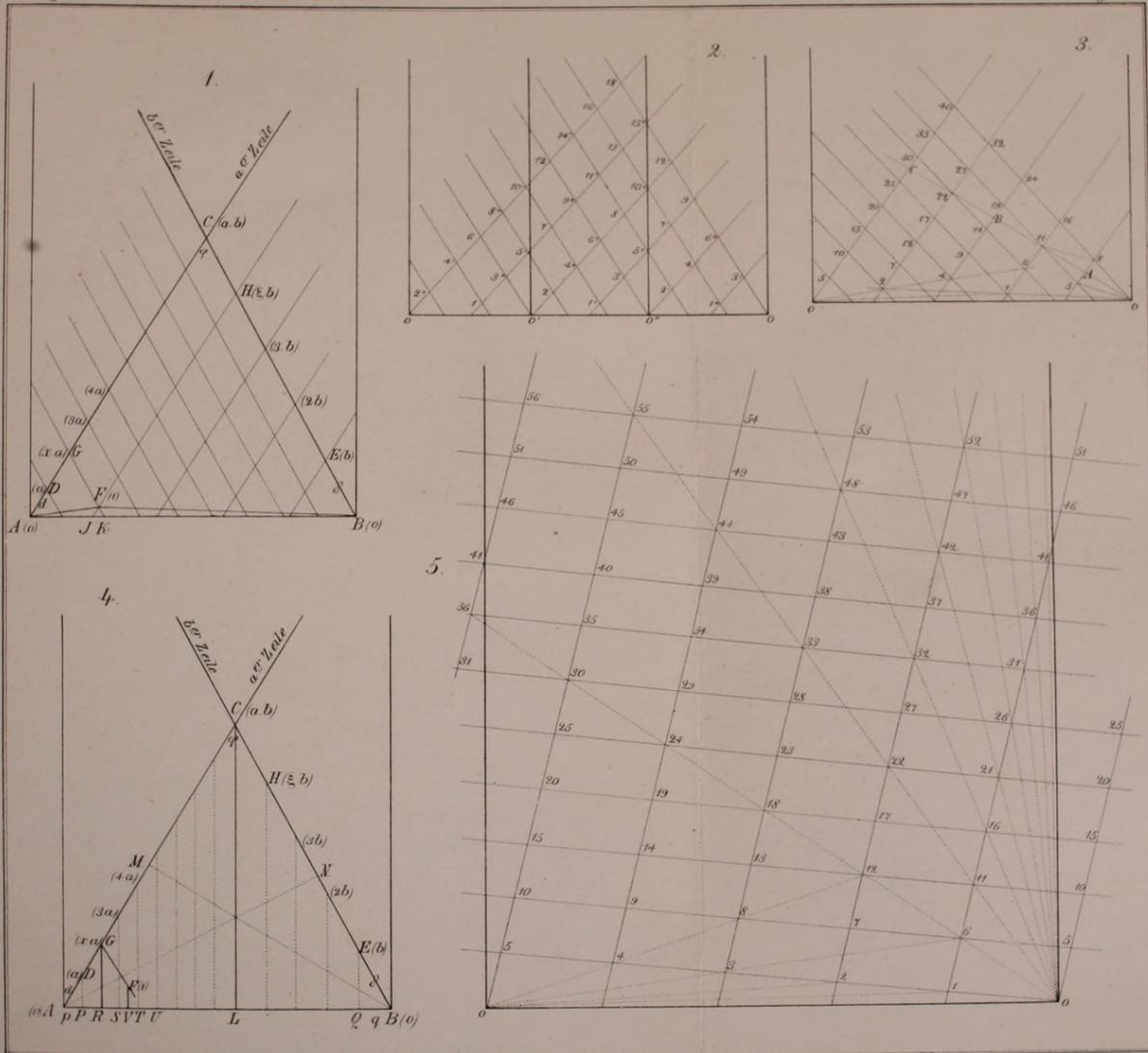
$$\xi \cdot b = \eta \cdot a + 1 \dots\dots\dots (2)$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen werden nach der Theorie der diophantischen Gleichungen auf folgende Weise bestimmt:

Man verwandle den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und bestimme den vorletzten Näherungswerth $\frac{\alpha}{\beta}$.²

¹ Stellt das gegebene Stellungsverhältniss gedrehte q -blättrige Wirtel dar, enthalten also die Coordinationszahlen a und b den grössten gemeinsamen Factor q , so giebt es bekanntlich q solche Längssegmente der Cylinderoberfläche, in deren jeder ein und dasselbe spiralisches Stellungsverhältniss besteht. Die für diese spiralischen Anordnungen geltenden Ordnungszahlen der Parastichen sind $\frac{a}{q}$ und $\frac{b}{q}$; der Punkt C erhält demnach die Nummer $\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q}$ (in Fig. 2 z. B. $\frac{6}{3} \cdot \frac{9}{3} = 6$). Setzt man $\frac{a}{q} = a'$ und $\frac{b}{q} = b'$, so gelten in jedem Längssegmente die nämlichen Gesetze für a' und b' , wie bei einer einfachen spiralischen Anordnung für a und b , bedürfen also keiner besonderen Untersuchung.

² Für den Fall, dass $a = 1$ ist, kann man den Bruch $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}$ als Kettenbruch



C. F. Schmidt del.

Kerber; phyllotaktische Probleme.

Die sämtlichen möglichen ganzzahligen Werthe für die Variablen in (1) und (2) werden dann durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x = \mp \beta + b \cdot m$$

$$y = \mp \alpha + a \cdot m$$

$$\xi = \pm \alpha + a \cdot m$$

$$\eta = \pm \beta + b \cdot m.$$

In diesen vier Gleichungen kann m jeden beliebigen ganzzahligen Werth annehmen, und es ist vor α und β das obere oder untere Vorzeichen zu setzen, je nachdem $\frac{a}{b}$ einen paarigen oder unpaarigen Näherungswerth bezeichnet.

Aus den sämtlichen möglichen Wurzelwerthen dieser vier Gleichungen hat man nun die kleinstmöglichen (positiven) auszuwählen. Setzt man daher in jenen Gleichungen je nach Bedürfniss $m = 0$ oder $= 1$, so nehmen sie folgende Gestalt an:

$$x = b - \beta \quad \text{oder} \quad = \beta \dots \dots \dots (3)$$

$$y = a - \alpha \quad \text{oder} \quad = \alpha \dots \dots \dots (4)$$

$$\xi = \alpha \quad \text{oder} \quad = a - \alpha \dots \dots \dots (5)$$

$$\eta = \beta \quad \text{oder} \quad = b - \beta \dots \dots \dots (6)$$

In diesen Gleichungen ist der erste oder zweite Werth zu wählen, je nachdem $\frac{a}{b}$ einen paarigen oder unpaarigen Näherungswerth bezeichnet.

Aus diesen Werthen für die Schrittzahlen in den a^{er} und b^{er} Zeilen wollen wir nun, um Zweideutigkeiten auszuschliessen, diejenigen auswählen, welche der Grunddivergenz (0.1) des kurzen Weges entsprechen. Zu diesem Zweck müssen wir bestimmen, in welchem Falle die Grundspirale im Sinne der a^{er} , und in welchem Falle im Sinne der b^{er} Zeilen verläuft.¹

Bezeichnen J und K (Fig. 1) die Durchschnittspunkte der durch die Insertion 1 gehenden Parastichen mit der Horizontalen AB , so

so schreiben: $\frac{1}{0+1}$

$\frac{1}{0+\frac{1}{b}}$. Der erste Partialwerth dieses Kettenbruchs ist $\frac{1}{0} = \infty$,

der zweite $\frac{0}{1} = 0$, der dritte $\frac{b \cdot 0 + 1}{b \cdot 1 + 0} = \frac{1}{b}$. Dann ist $\alpha = 0$, $\beta = 1$, und $\frac{1}{b}$ stets ein unpaariger Näherungswerth.

¹ Vgl. M. C. DE CANDOLLE, Considérations sur l'étude de la phyllotaxie, Genève, Bâle, Lyon 1881, p. 70.

muss die Divergenz des kurzen Wegs auf der Grundspirale bezeichnet werden durch die Linie AF , falls K näher an A als an B liegt, und durch die Linie BF , falls J näher an B als an A liegt. Je nachdem also $\frac{AK}{AB}$ oder $\frac{BJ}{AB} < \frac{1}{2}$ ist, verläuft die Grundspirale gleichsinnig mit den a^{er} oder b^{er} Zeilen. Nun folgt aus der Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke unter Berücksichtigung von (3) und (5):

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{x \cdot d}{b \cdot d} = \frac{x}{b} = \begin{cases} \frac{b-\beta}{b} \text{ oder} \\ \frac{\beta}{b} \end{cases}$$

$$\frac{BJ}{AB} = \frac{BH}{BC} = \frac{\xi \cdot \delta}{a \cdot \delta} = \frac{\xi}{a} = \begin{cases} \frac{\alpha}{a} \text{ oder} \\ \frac{a-\alpha}{a}. \end{cases}$$

Hierin bezeichnen d und δ die Insertionsabstände AD und BE auf den a^{er} und b^{er} Zeilen, und es sind die oberen oder unteren Werthe zu setzen, je nachdem $\frac{a}{b}$ einen paarigen oder unpaarigen Näherungswerth darstellt. Bezeichnet man mit n den letzten Partialquotienten des Kettenbruchs $\frac{a}{b}$ und mit $\frac{\alpha'}{\beta'}$ den drittletzten Näherungswerth, so ist:

$$a = n\alpha + \alpha' \text{ und } b = n\beta + \beta'.$$

Da $n > 1$ sein muss, so ist $a > 2\alpha$ und $b > 2\beta$, also $\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{2}$ und ebenso $\frac{\beta}{b} < \frac{1}{2}$.

Demnach lässt sich folgender Satz aufstellen: Die Grundspirale verläuft im Sinne der a^{er} oder b^{er} Zeilen, je nachdem $\frac{a}{b}$ einen unpaarigen oder paarigen Näherungswerth bezeichnet.

Im ersten Falle dienen also die zweiten Werthe von x und y in den Gleichungen (3) und (4), im letzteren die ersten von ξ und η in (5) und (6) zur Berechnung der Nummer derjenigen Insertion (G oder H), über welche der kürzere Weg führt, um in zwei gegenläufigen Zeilen von der Insertion O nach I zu gelangen.

Dies Ergebniss führt zu der allgemeinen Regel:

Bezeichnet a die kleinere und b die grössere Coordinationszahl der Schrägzeilen eines spiraligen Stellungsverhältnisses, so betragen die Schrittzahlen in denjenigen

Parastichen, auf welchen der kürzere Weg führt, um in zwei correspondirenden Zeilen von der Insertion 0 nach 1 zu gelangen, so viel für die a^{er} Zeile, als der Nenner, und so viel für die b^{er} Zeile, als der Zähler des vorletzten Näherungswerths von $\frac{a}{b}$ angiebt, gleichviel ob die Grundspirale im Sinne der a^{er} oder b^{er} Zeilen verläuft.

Die beiden möglichen Fälle sind in den Figuren 1 und 3 veranschaulicht. In Fig. 1 kreuzen sich 5^{er} und 9^{er} Zeilen. Die Grundspirale verläuft also gleichsinnig mit den a^{er} Zeilen. Der vorletzte Näherungswerth von $\frac{5}{9}$ ist $\frac{1}{2}$. Die Schrittzahl in der a^{er} Zeile beträgt daher 2, in der b^{er} Zeile 1, um auf dem kürzeren Wege AGF von 0 nach 1 zu gelangen. In Fig. 3 kreuzen sich 5^{er} und 8^{er} Zeilen, so dass die Grundspirale in der Richtung der b^{er} Zeilen verläuft. Der vorletzte Näherungswerth von $\frac{5}{8}$ ist $\frac{2}{3}$. Die correspondirenden Schrittzahlen betragen daher 3 in der a^{er} , 2 in der b^{er} Zeile, um auf dem kürzeren Wege 0·8·16·11·6·1 von 0 nach 1 zu gelangen.

2. Trigonometrische Berechnung der Grunddivergenz.

Wir sind hiermit in den Besitz sämtlicher Daten gelangt, um die Divergenz eines Stellungsverhältnisses aus den Ordnungszahlen a und b , den Insertionsabständen d und δ und dem Öffnungswinkel ϕ zweier correspondirender Parastichen abzuleiten.

In Fig. 4 ist dieselbe Gruppierung der Insertionen auf den beiden correspondirenden Zeilen AC und BC und die gleiche Lage der Insertion 1 (F) unter Beibehaltung aller Bezeichnungen dargestellt, wie in Fig. 1. Projicirt man nun die sämtlichen in diesen beiden Zeilen gelegenen Insertionen ($D, G \dots C, H, \dots E$) auf die Horizontale AB , und bezeichnet L die Projektion des Punktes C , so wird AL durch die Projektionen der b auf AC gelegenen Insertionen in b gleiche Theile $p = AP = PR = RS = ST = TU$ u. s. f. getheilt, und BL durch die Projektionen der a auf BC liegenden Insertionen in a gleiche Theile $q = BQ$ u. s. f. Es ist demnach die Horizontale:

$$AB = b \cdot p + a \cdot q \dots \dots \dots (7)$$

Bezeichnet ferner V die Projektion der Insertion 1 (F) auf AB , und R diejenige der Insertion $x \cdot a$ (G), so ist nach dem zweiten im vorigen Kapitel angegebenen Gesetze $AR = \beta \cdot p$, und $RV = \alpha \cdot q$, demnach: $AV = \beta \cdot p + \alpha \cdot q$.

Dividirt man diese Gleichung durch den Ausdruck (7), und setzt man das Verhältniss $\frac{AV}{AB}$, welches die Grunddivergenz des gegebenen Stellungsverhältnisses bezeichnet, $= g$, so ist:

$$g = \frac{\beta p + \alpha q}{bp + aq} \dots\dots\dots (8)$$

In diesem Ausdruck für die Divergenz des gegebenen Stellungsverhältnisses lassen sich die Werthe für die Projectionen p und q der Insertionsabstände d und δ auf folgende Weise durch die praktisch leichter messbaren und auch in theoretischer Hinsicht vorzuziehenden Werthe d , δ und ϕ ersetzen.

Man projicire AC und BC auf einander, so ist CM , die Projection von BC , durch die Gleichung bestimmt: $CM = a\delta \cdot \cos \phi$, mithin ist $AM = bd - a\delta \cos \phi$. Ebenso ist:

$$BN = a\delta - bd \cos \phi.$$

Nun folgt aus der Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke:

$$\frac{p}{d} = \frac{AM}{AB} \text{ und } \frac{q}{\delta} = \frac{BN}{AB}, \text{ daher:}$$

$$p = \frac{d}{AB} \cdot (bd - a\delta \cos \phi) \text{ und } q = \frac{\delta}{AB} \cdot (a\delta - bd \cos \phi).$$

Setzt man diese Werthe von p und q in (8) ein und entfernt AB , so ist:

$$g = \frac{\beta \cdot d (bd - a\delta \cos \phi) + \alpha \cdot \delta (a\delta - bd \cos \phi)}{b \cdot d (bd - a\delta \cos \phi) + a \cdot \delta (a\delta - bd \cos \phi)} \dots\dots\dots (9)$$

Wir wollen nunmehr die praktische Verwerthbarkeit dieser Formel an den Tabellen erproben, welche S. SCHWENDENER (Mechanische Theorie der Blattstellungen, Leipzig 1878, S. 16—22) auf andere Weise berechnet hat.

Für die erste, dritte, fünfte und sechste dieser unten wiedergegebenen Tabellen ist der Öffnungswinkel ϕ derjenigen von den je drei correspondirenden Contactlinien, welche die beiden niederen Coordinationszahlen haben, gleich 120° ; die Insertionsdistanzen d und δ sind, da alle Tabellen für kreisförmige Organe gelten, überall einander gleich, so dass der Ausdruck (9) übergeht in:

$$g = \frac{\beta (b - a \cos \phi) + \alpha (a - b \cos \phi)}{b (b - a \cos \phi) + a (a - b \cos \phi)}$$

Ist $\phi = 120^\circ$, also $\cos \phi = -\frac{1}{2}$, so wird:

$$g = \frac{\beta (2b + a) + \alpha (2a + b)}{b (2b + a) + a (2a + b)} \dots\dots\dots (10)$$

Ist $\phi = 90^\circ$, also $\cos \phi = 0$, so ist:

$$g = \frac{\beta \cdot b + \alpha \cdot a}{b^2 + a^2} \dots \dots \dots (11)$$

Mittels der Formel (10) sind die erste, dritte, fünfte und sechste, mittels (11) die zweite und vierte Tabelle berechnet. Die gemeinen Brüche geben die Divergenzen genau an.

Tabelle 1.

Divergenzen bei Kreuzung der Contactzeilen unter einem Winkel von 120° (und 60°)¹. SCHWENDENER, a. a. O. S. 16.

Contactlinien	Divergenz
1 ^{er} , 1 ^{er} (und 2 ^{er})	$\frac{1}{2} = 180^\circ$
1 ^{er} , 2 ^{er} (und 3 ^{er})	$\frac{5}{14} = 128^\circ 34'$
2 ^{er} , 3 ^{er} (und 5 ^{er})	$\frac{15}{38} = 142^\circ 6'$
3 ^{er} , 5 ^{er} (und 8 ^{er})	$\frac{37}{98} = 135^\circ 55'$
5 ^{er} , 8 ^{er} (und 13 ^{er})	$\frac{33}{86} = 138^\circ 8'$
8 ^{er} , 13 ^{er} (und 21 ^{er})	$\frac{257}{674} = 137^\circ 16'$
13 ^{er} , 21 ^{er} (und 34 ^{er})	$\frac{675}{1766} = 137^\circ 36'$
21 ^{er} , 34 ^{er} (und 55 ^{er})	$\frac{1765}{4622} = 137^\circ 28'$

Tabelle 2.

Divergenzen bei rechtwinkliger Kreuzung der Contactlinien (a. a. O. S. 18).

Contactlinien	1 ^{er} u. 2 ^{er}	2 ^{er} u. 3 ^{er}	3 ^{er} u. 5 ^{er}	5 ^{er} u. 8 ^{er}	8 ^{er} u. 13 ^{er}
Divergenzen	$\frac{2}{5} = 144^\circ$	$\frac{5}{13} = 138^\circ 28'$	$\frac{13}{34} = 137^\circ 39'$	$\frac{34}{89} = 137^\circ 31'$	$\frac{89}{233} = 137^\circ 30' 39''$

¹ Man erinnere sich, dass in (10) und (11) $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ zu setzen ist, wenn $a = 1$ ist.

Tabelle 3.

Divergenzen bei Kreuzung der Contactzeilen unter 120°
(a. a. O. S. 19).

Reihe 1, 3, 4, 7, 11, 18 etc.		Reihe 1, 4, 5, 9, 14, 23 etc.	
Contactlinien	Divergenzen	Contactlinien	Divergenzen
1 ^{er} 3 ^{er} (4 ^{er})	$\frac{7}{26} = 96^\circ 55'$	1 ^{er} 4 ^{er} (5 ^{er})	$\frac{3}{14} = 77^\circ 8'$
3 ^{er} 4 ^{er} (7 ^{er})	$\frac{21}{74} = 102^\circ 10'$	4 ^{er} 5 ^{er} (9 ^{er})	$\frac{27}{122} = 79^\circ 40'$
4 ^{er} 7 ^{er} (11 ^{er})	$\frac{17}{62} = 98^\circ 43'$	5 ^{er} 9 ^{er} (14 ^{er})	$\frac{65}{302} = 77^\circ 29'$
7 ^{er} 11 ^{er} (18 ^{er})	$\frac{137}{494} = 99^\circ 50'$	9 ^{er} 14 ^{er} (23 ^{er})	$\frac{175}{806} = 78^\circ 10'$
11 ^{er} 18 ^{er} (29 ^{er})	$\frac{355}{1286} = 99^\circ 23'$	14 ^{er} 23 ^{er} (37 ^{er})	$\frac{151}{698} = 77^\circ 53'$

Tabelle 4.

Divergenzen bei rechtwinkliger Kreuzung (a. a. O. S. 20 u. 21.)

Reihe 1, 3, 4, 7, 11 . . .				
Contactlinien	1 ^{er} , 3 ^{er}	3 ^{er} , 4 ^{er}	4 ^{er} , 7 ^{er}	7 ^{er} , 11 ^{er}
Divergenzen	$\frac{3}{10} = 108^\circ$	$\frac{7}{25} = 100^\circ 48'$	$\frac{18}{65} = 99^\circ 42'$	$\frac{47}{170} = 99^\circ 32'$
Reihe 1, 4, 5, 9, 14 . . .				
Contactlinien	1 ^{er} , 4 ^{er}	4 ^{er} , 5 ^{er}	5 ^{er} , 9 ^{er}	9 ^{er} , 14 ^{er}
Divergenzen	$\frac{4}{17} = 84^\circ 42'$	$\frac{9}{41} = 79^\circ 1'$	$\frac{23}{106} = 78^\circ 7'$	$\frac{60}{277} = 77^\circ 58'$
Reihe 1, 5, 6 . . .	Contactlinien	1 ^{er} , 5 ^{er}	5 ^{er} , 6 ^{er}	
	Divergenzen	$\frac{5}{26} = 69^\circ 14'$	$\frac{11}{61} = 64^\circ 55'$	
Reihe 1, 6, 7 . . .	Contactlinien	1 ^{er} , 6 ^{er}	6 ^{er} , 7 ^{er}	
	Divergenzen	$\frac{6}{37} = 58^\circ 23'$	$\frac{13}{85} = 55^\circ 3'$	
Reihe 1, n, n + 1 . . .	Contactlinien	1 ^{er} , n ^{er}	n ^{er} , (n + 1) ^{er}	
	Divergenzen	$\frac{n}{n^2 + 1}$	$\frac{2n + 1}{2n(n + 1) + 1}$	

Tabelle 5.

Divergenzen bei Kreuzung unter 120° (a. a. O. S. 21).

Contactlinien	2 ^{er} , 5 ^{er} (7 ^{er})	5 ^{er} , 7 ^{er} (12 ^{er})	7 ^{er} , 12 ^{er} (19 ^{er})	12 ^{er} , 19 ^{er} (31 ^{er})
Divergenzen	$\frac{11}{26} = 152^\circ 18'$	$\frac{91}{218} = 150^\circ 16'$	$\frac{233}{554} = 151^\circ 24'$	$\frac{615}{1466} = 151^\circ 1'$

Tabelle 6.

Divergenzen bei Kreuzung unter 120° (a. a. O. S. 22).

Reihe 3, 7, 10, 17 ..	Contactlinien	3 ^{er} , 7 ^{er} (10 ^{er})	7 ^{er} , 10 ^{er} (17 ^{er})
	Divergenzen	$\frac{47}{158} = 107^\circ 5'$	$\frac{43}{146} = 106^\circ 2'$
Reihe 3, 8, 11, 19 ..	Contactlinien	3 ^{er} , 8 ^{er} (11 ^{er})	8 ^{er} , 11 ^{er} (19 ^{er})
	Divergenzen	$\frac{71}{194} = 131^\circ 45'$	$\frac{67}{182} = 132^\circ 32'$
Reihe 3, 10, 13, 23 ..	Contactlinien	3 ^{er} , 10 ^{er} (13 ^{er})	10 ^{er} , 13 ^{er} (23 ^{er})
	Divergenzen	$\frac{85}{278} = 110^\circ 4'$	$\frac{81}{266} = 109^\circ 37'$
Reihe 4, 9, 13, 22 ..	Contactlinien	4 ^{er} , 9 ^{er} (13 ^{er})	9 ^{er} , 13 ^{er} (22 ^{er})
	Divergenzen	$\frac{61}{266} = 82^\circ 33'$	$\frac{167}{734} = 81^\circ 54'$
Reihe 5, 12, 17, 29 ..	Contactlinien	5 ^{er} , 12 ^{er} (17 ^{er})	12 ^{er} , 17 ^{er} (29 ^{er})
	Divergenzen	$\frac{189}{458} = 148^\circ 33'$	$\frac{527}{1274} = 148^\circ 55'$

Schliesslich wollen wir noch die Divergenzen einiger Stellungsverhältnisse berechnen, bei denen die Insertionsabstände d und δ auf den Zeilen zweier correspondirender Systeme ungleich sind. Es sei die Grösse des Öffnungswinkels der a^{er} und b^{er} Zeilen $\phi = 90^\circ$ gesetzt, wie sie (annähernd wenigstens) in der Natur besonders häufig beobachtet wird.¹ Dann geht die Formel (9) über in:

$$g = \frac{\beta b d^2 + \alpha a \delta^2}{b^2 d^2 + a^2 \delta^2} = \frac{\beta b \cdot \frac{d^2}{\delta^2} + \alpha a}{b^2 \cdot \frac{d^2}{\delta^2} + a^2}$$

Es möge ferner das Grössenverhältniss von d und δ durch die Gleichung bestimmt sein:

$$\frac{d}{\delta} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{Dann wird:}$$

$$g = \frac{\beta + \alpha}{b + a} \dots \dots \dots (12)$$

¹ Vergl. SCHWENDENER, a. a. O. S. 40.

Diesen Bedingungen entsprechen die Divergenzen der folgenden Tabelle.

Wie aus derselben ersichtlich, bilden die Divergenzen unter diesen Umständen die bekannten SCHIMPER'schen Reihen, und zwar sind die Insertionen bei diesen Stellungsverhältnissen so gruppirt, dass die sich rechtwinklig kreuzenden Schrägzeilen den höchst möglichen Ordnungen entsprechen, und die Orthostichen bereits augenfällig hervortreten müssen, falls hinlänglich zahlreiche Insertionen vorhanden sind. Wenn die Parastichen in diesen Fällen Contactlinien sind, so können die Organe natürlich keine kreisförmige Querschnittsfläche haben. (Vergl. hierüber den Abschnitt: Verschiebungen elliptischer Organe, bei SCHWENDENER, a. a. O. S. 28 ff.)

Tabelle 7.

Divergenzen bei rechtwinkliger Kreuzung, wenn $\frac{d}{\delta} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ist.

Parastichen	Verhältniss zwischen den Insertionsdistanzen	Divergenzen
1 ^{er} und 1 ^{er}	$\sqrt{\frac{1}{1}} = 1$	$\frac{1}{2}$
1 ^{er} und 2 ^{er}	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.7071$	$\frac{1}{3}$
2 ^{er} und 3 ^{er}	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165$	$\frac{2}{5}$
3 ^{er} und 5 ^{er}	$\sqrt{\frac{3}{5}} = 0.7746^1$	$\frac{3}{8}$
5 ^{er} und 8 ^{er}	$\sqrt{\frac{5}{8}} = 0.7906$	$\frac{5}{13}$
8 ^{er} und 13 ^{er}	$\sqrt{\frac{8}{13}} = 0.7845$	$\frac{8}{21}$
13 ^{er} und 21 ^{er}	$\sqrt{\frac{13}{21}} = 0.7868$	$\frac{13}{34}$
21 ^{er} und 34 ^{er}	$\sqrt{\frac{21}{34}} = 0.7859$	$\frac{21}{55}$
1 ^{er} und 3 ^{er}	$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5774$	$\frac{1}{4}$

¹ Dies Verhältniss findet z. B. öfter bei den Carpiden von Magnolia Yulan statt (vergl. die Fig. 53 auf Taf. X bei SCHWENDENER, daselbst die oberhalb 67 und 68 liegenden Carpiden).

Parastichen	Verhältniss zwischen den Insertionsdistanzen	Divergenzen
3 ^{er} und 4 ^{er}	$\sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8660$	$\frac{2}{7}$
4 ^{er} und 7 ^{er}	$\sqrt{\frac{4}{7}} = 0.7559$	$\frac{3}{11}$
7 ^{er} und 11 ^{er}	$\sqrt{\frac{7}{11}} = 0.7977$	$\frac{5}{18}$
11 ^{er} und 18 ^{er}	$\sqrt{\frac{11}{18}} = 0.7817$	$\frac{8}{29}$
18 ^{er} und 29 ^{er}	$\sqrt{\frac{18}{29}} = 0.7879$	$\frac{13}{47}$
1 ^{er} und 4 ^{er}	$\sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5$	$\frac{1}{5}$
4 ^{er} und 5 ^{er}	$\sqrt{\frac{4}{5}} = 0.8944$	$\frac{2}{9}$
5 ^{er} und 9 ^{er}	$\sqrt{\frac{5}{9}} = 0.7454$	$\frac{3}{14}$

3. Entwicklung der Divergenz in einen Kettenbruch.

Die Ausdrücke (8) und (9) lassen sich nach einem Satze aus der Kettenbruchtheorie in einen Kettenbruch verwandeln, der aus zwei Theilen besteht. Der erste Theil hat den Endwerth $\frac{\beta}{b}$ und den vor-

letzten Näherungswerth $\frac{\alpha}{a}$. Der Werth des zweiten Theils ist

$$\frac{q}{p} \text{ resp. } \frac{\delta(ad - bd \cos \phi)}{d(bd - ad \cos \phi)}$$

Giebt nämlich die Entwicklung von $\frac{a}{b}$ einen Kettenbruch von der Form (13), so dass $\frac{\alpha}{\beta}$ der vorletzte Näherungswerth desselben ist, so muss die Entwicklung von $\frac{\beta}{b}$ einen Kettenbruch von der Form (14) ergeben, dessen vorletzter Näherungswerth $\frac{\alpha}{a}$ ist, und welcher dieselbe Zahl von Partial-

brüchen wie (13) hat, aber die Partialquotienten in umgekehrter Reihenfolge enthält:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots + \frac{1}{n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}} \dots \left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right) \dots \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \dots \left(\frac{a}{b}\right) \dots}} \dots (13)$$

$$\frac{\beta}{b} = \frac{1}{n_k + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_{k-2} + \dots + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_1}} \dots \left(\frac{\alpha}{a}\right) \dots \left(\frac{\beta}{b}\right) \dots}} \dots (14)$$

Dies lässt sich folgendermaassen beweisen.¹

Man bezeichne die Näherungswerthe des Kettenbruchs (13), vom letzten beginnend, mit $\frac{a}{b}, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''}, \frac{\alpha'''}{\beta'''}$ u. s. f. Die Beziehung zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ wird bekanntlich durch folgende Gleichung ausgedrückt: $b\alpha - a\beta = \pm 1$.

Dieselbe Gleichung gilt für die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{\beta}{b}$, die daher successive Näherungswerthe des Kettenbruchs $\frac{\beta}{b}$ sein müssen.

Nun ist:

$$b = n_k \cdot \beta + \beta', \text{ also } \frac{\beta}{b} = \frac{\beta}{n_k \cdot \beta + \beta'} = \frac{1}{n_k + \frac{\beta'}{\beta}} \dots (13')$$

Ferner ist:

$$\beta = n_{k-1} \cdot \beta' + \beta'', \text{ also } \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\beta'}{n_{k-1} \cdot \beta' + \beta''} = \frac{1}{n_{k-1} + \frac{\beta''}{\beta'}} \dots (13'')$$

Ebenso ist:

$$\beta' = n_{k-2} \cdot \beta'' + \beta''', \text{ also } \frac{\beta''}{\beta'} = \frac{\beta''}{n_{k-2} \cdot \beta'' + \beta'''} = \frac{1}{n_{k-2} + \frac{\beta'''}{\beta''}} \dots (13''')$$

¹ Vgl. hierüber M. C. DE CANDOLLE, a. a. O. S. 69.

Führt man mit der Entwicklung in dieser Weise fort und substituirt sodann jede folgende Gleichung in der früheren, also (13''') in (13''), diese in (13'), so erhält man für $\frac{\beta}{b}$ den Kettenbruch (14).

Der Ausdruck (8) ergibt demnach, wenn das Verhältniss der Coordinationszahlen a und b den Totalwerth eines Kettenbruchs von der Form (13) bezeichnet, folgende Kettenbruchform:

$$g = \frac{1}{n_k + 1 + \frac{1}{n_{k-1} + \dots + \frac{1}{n_3 + 1 + \frac{1}{n_2 + 1 + \dots + \frac{1}{n_1 + \frac{q}{p}} \dots \left(\frac{\alpha}{a}\right) \dots \left(\frac{\beta}{b}\right) \dots (g) \dots}}}} \dots (15)$$

Der die Divergenz eines Stellungsverhältnisses darstellende Kettenbruch lässt sich daher aus zwei Theilen zusammensetzen. Der erste Theil endet mit zwei Näherungswerthen, deren Nenner gleich den Coordinationszahlen a und b zweier in dem Stellungsverhältniss auftretender gegenläufiger Parastichensysteme sind. Der Werth des zweiten Theils wird durch das Verhältniss der Horizontalprojectionen der Insertionsdistanzen auf der b^{er} und a^{er} Zeile bestimmt.

Der Werth der Divergenz ist daher, wenn $\frac{\alpha}{\beta}$ den vorletzten Näherungswerth von $\frac{a}{b}$ bezeichnet, zwischen zwei Grenzen $\frac{\alpha}{a}$ und $\frac{\beta}{b}$ eingeschlossen, deren Werthe von der Grösse jener Horizontalprojectionen und also auch von der Grösse der Insertionsabstände und des Öffnungswinkels der Parastichen gänzlich unabhängig sind.

Dieses Gesetz werde durch ein Beispiel erläutert.

Es sei ein Stellungsverhältniss gegeben, in welchem sich 5^{er} und 9^{er} Zeilen kreuzen (Fig. 1). Man entwickle $\frac{5}{9}$ in einen Kettenbruch und bestimme den vorletzten Partialwerth desselben $\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \dots \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{9}\right)}}$$

Die Divergenz des Stellungsverhältnisses ist daher zwischen den Grenzen $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{9}$ eingeschlossen und wird durch den Kettenbruch bezeichnet;

$$g = \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{p} \dots \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{2}{9}\right) \dots (g)}}}}$$

Das zwischen den Horizontalprojectionen q und p bestehende Verhältniss kann jeden beliebigen positiven Werth annehmen, ohne dass die Divergenz die angegebenen Grenzen überschreitet.

4. Die combinationsfähigen Parastichensysteme eines gegebenen Stellungsverhältnisses.

Aus dem zuletzt entwickelten Satz lässt sich das allgemeine Gesetz ableiten für die Correlation zwischen den Ordnungszahlen sämtlicher combinationsfähiger Zeilensysteme eines bestimmten gegebenen Stellungsverhältnisses.

Bekanntlich lassen sich die Insertionen eines gegebenen regelmässigen Stellungsverhältnisses nach allen Richtungen durch Systeme paralleler und äquidistanter Linien verbinden; nicht alle aber lassen sich paarweise so combiniren, dass alle Durchschnittspunkte zugleich Insertionspunkte sind. Verbindet man z. B. die beiden Insertionen 0 und 11 in Fig. 3 durch eine Linie, so giebt es 11 damit parallele und äquidistante secundäre Spiralen, welche alle in Fig. 3 gegebenen Insertionen mit einander verbinden. Ebenso gehen die 5^{er} Zeilen durch alle Insertionen. Trotzdem lassen sich die 5^{er} und 11^{er} Zeilen nicht in der angegebenen Weise combiniren; denn sie ergeben eine Anzahl überzähliger Durchschnittspunkte A, B, C u. s. w.¹

Das am Schluss des vorigen Capitels entwickelte Gesetz gilt nun aber nur für combinationsfähige Zeilensysteme, d. h. für solche

¹ Wie sich an jeder Figur leicht demonstrieren lässt, können solche Paare von Parastichensystemen, welche überzählige Durchschnittspunkte ergeben würden, weder als Contactlinien- noch als die augenfälligsten Parastichensysteme überhaupt figuriren. Man kann dies an einem einzigen Parallelogramm, z. B. 0.3.11.8 (Fig. 3), darthun.

Paare von Parastichensystemen, deren sämtliche Durchschnittspunkte als Insertionen numerirt sind.

Um daher diesem Gesetze gemäss die Ordnungszahlen sämtlicher möglicher combinationsfähiger Zeilensysteme aus dem Ausdruck für die Divergenz des gegebenen Stellungsverhältnisses abzuleiten, entwickle man diese Divergenz g in einen Kettenbruch:

$$g = \frac{1}{n_1 + 1} \cfrac{1}{n_2 + 1} \cfrac{1}{n_3 + 1} \dots \cfrac{1}{n_{k-1} + 1} \cfrac{\left(\frac{\alpha}{a}\right)}{n_k + 1} \cfrac{\left(\frac{\beta}{b}\right)}{n_{k+1} + 1} \dots \cfrac{1}{n_i} \dots (g).$$

Die durch jenes Gesetz geforderte Zerlegung dieses Kettenbruchs in zwei Theile werde nun bei dem k^{ten} Partialquotienten (n_k) vorgenommen. Dies kann so geschehen, dass entweder die sämtlichen Einheiten dieses Partialquotienten zum ersten Theil gestellt werden oder nur ein Theil derselben.

Im ersten Falle seien die beiden letzten Näherungswerte des ersten Theils $\frac{\alpha}{a}$ und $\frac{\beta}{b}$. Dann sind es die a^{er} und b^{er} Zeilen, deren Ordnungszahlen den Nennern zweier successiver Näherungswerte gleich sind. Daher sind die a^{er} und b^{er} Zeilen combinationsfähig.

Im anderen Falle stelle man von den in n_k befindlichen Einheiten nach einander eine, zwei, 3 ($n_k - 1$) zum ersten Theil des Kettenbruchs und berechne die letzten Näherungswerte dieses Theils. Sie seien:

$$\frac{\alpha}{a} \text{ und } \frac{\beta_1}{b_1}, \text{ wenn der letzte Partialquotient 1 ist;}$$

$$\frac{\alpha}{a} \text{ und } \frac{\beta_2}{b_2}, \text{ wenn er 2 ist, u. s. f. bis:}$$

$$\frac{\alpha}{a} \text{ und } \frac{\beta_{(n_k-1)}}{b_{(n_k-1)}}, \text{ wenn er } (n_k - 1) \text{ ist.}$$

Dann sind es die Zeilen nach a und b_1 ; a und b_2 ; a und b_3 ; a und $b_{(n_k-1)}$, deren Ordnungszahlen die vorgeschriebene Bedingung erfüllen. Daher sind auch diese Zeilenpaare combinationsfähig.

Was von dem Partialquotienten n_k gilt, lässt sich ebenso für jeden andern des gegebenen Kettenbruchs darthun. Daher wird die

Correlation zwischen den Ordnungszahlen der combinationsfähigen Zeilensysteme durch folgendes Gesetz ausgedrückt:

Die Nenner je zweier successiver Näherungswerthe des die Divergenz eines gegebenen Stellungsverhältnisses darstellenden Kettenbruchs bezeichnen die Ordnungszahlen je zweier combinationsfähiger Zeilensysteme dieses Stellungsverhältnisses. Ausserdem lässt sich jedes Parastichensystem, dessen Coordinationszahl gleich einem solchen Nenner ist, mit so vielen intermediären Zeilensystemen combiniren, als die Einheiten betragen, um welche der folgende Partialquotient grösser ist als 1.

Ein Beispiel wird das Gesagte völlig klar stellen.

In Fig. 5 ist ein Stellungsverhältniss abgebildet, dessen Divergenz $\frac{42}{215}$ beträgt. Stellt man $\frac{42}{215}$ als Kettenbruch dar: $\frac{1}{5 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$,

so sind die successiven Näherungswerthe:

$$\frac{1}{5}, \frac{8}{41}, \frac{17}{87}, \frac{42}{215}.$$

Um die Coordinationszahlen der sämtlichen Zeilensysteme zu bestimmen, welche sich mit den 5^{er} Zeilen combiniren lassen, setze man den zweiten Partialquotienten des Kettenbruchs successive gleich 1, 2, 3 . . . 7, 8 und berechne die betreffenden Näherungswerthe:

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{3}{16}, \frac{4}{21}, \frac{5}{26}, \frac{6}{31}, \frac{7}{36}, \frac{8}{41}.$$

Dann bezeichnen die Nenner 6, 11, 16, 21, 26, 31 und 36 die Coordinationszahlen der sieben intermediären Systeme, welche sich mit den 5^{er} Zeilen combiniren lassen, und der letzte Nenner 41 die Ordnungszahl des betreffenden Normalsystems. Die Figur zeigt, dass überzählige Durchschnittspunkte sich bei diesen Combinationen nicht ergeben.

Ist das gegebene Stellungsverhältniss ein solches, dass die sämtlichen successiven Partialquotienten des die Divergenz bezeichnenden Kettenbruchs vom zweiten ab gleich 1 sind, so werden die Coordinationszahlen sämtlicher möglicher combinationsfähiger Zeilensysteme des gegebenen Stellungsverhältnisses durch die bekannten Reihen bezeichnet:

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots \\ &1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 \dots \\ &1, 4, 5, 9, 14, 23, 37 \dots \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Von diesen Zahlen können daher nur immer je zwei successive in Combination treten.

Zum Schlusse sei noch auf folgende Consequenz dieser Darstellungsweise hingewiesen.

Bekanntlich muss der erste Partialquotient jedes Kettenbruchs, welcher die nach dem kurzen Wege gemessene Divergenz eines Stellungsverhältnisses bezeichnet, grösser als 1 sein. Ist nun n dieser erste Partialquotient, so lässt sich, wie schon erwähnt, der gegebene Kettenbruch am Anfang schreiben: 1

$$\frac{1}{0 + \frac{1}{0 + \frac{1}{n + \text{u. s. w.}}}}$$

Dann ist der zweite Näherungswerth $\frac{0}{1}$ und der dritte $\frac{1}{n}$. Demgemäss bezeichnen die Nenner 1 und n ein normales Combinationsverhältniss. Setzt man statt n aber successive die Partialquotienten 1, 2, 3 . . . ($n - 1$), so ergeben sich ($n - 1$) intermediäre Systeme, welche mit der Einerzeile combinirt werden können.

So lassen sich in Fig. 5 die vier intermediären Zeilen: die Einerzeile des langen Wegs, die Zweier-, Dreier- und Viererzeilen mit der Einerzeile des kurzen Wegs combiniren, und erst die Fünferzeilen ergeben mit der Einerzeile (des kurzen Wegs) die normale Combination. Im Fall, wo $n = 2$, (Fig. 3) combiniren sich natürlich nur 1^{er} und 1^{er}, sowie 1^{er} und 2^{er} Zeilen in dieser Weise. Von diesen Combinationen hat die der 1^{er} und 1^{er} Zeile offenbar nur theoretische Bedeutung, während alle übrigen bei entsprechender Entfernung der Insertionen augenfällig hervortreten können.

Die Stellungsverhältnisse der ersten SCHIMPER'schen Reihe sind daher die einzigen, bei denen intermediäre Zeilen überhaupt nicht auftreten können.

Ausgegeben am 4. Mai.



Kerber, Edmund. 1882. "Die Lösung einiger phyllotakischen Probleme mittels einer diophantischen Gleichung." *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* Jan-Mai 1882, 457–473.

View This Item Online: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/93362>

Permalink: <https://www.biodiversitylibrary.org/partpdf/209931>

Holding Institution

Smithsonian Libraries and Archives

Sponsored by

Smithsonian

Copyright & Reuse

Copyright Status: Public domain. The BHL considers that this work is no longer under copyright protection.

This document was created from content at the **Biodiversity Heritage Library**, the world's largest open access digital library for biodiversity literature and archives. Visit BHL at <https://www.biodiversitylibrary.org>.