UNAM

20835

INSTITUTO DE GEOLOGÍA - CU

QB301
M6

UNAM

20835

INSTITUTO DE GEOLOGÍA - CU

14-26-4-22
000077613

BIBLIOTECA

BIBLIOTECA

BIBLIOTECA

11 NOV 1933

316 120 10

CURSO ELEMENTAL

DE

GEODESIA

PARA USO DE LOS ALUMNOS

DEL COLEGIO NACIONAL DE MINERIA

POR EL CIUDADANO

Comas Ramon del Moral,

Profesor de dicha ciencia en el mismo colegio, Ingeniero Geógrafo y de Minas, Miembro del Instituto Nacional de Geografía y Estadística y de la Junta Directiva general de Estudios, y Corresponsal de la Sociedad Geológica de Pensilvania.

IMPRESO DE ÓRDEN

DEL ESCMO. SR. MINISTRO DE RELACIONES

D. J. Fernando Ramirez.

MÉXICO.

IMPRENTA DE VICENTE GARCÍA TORRES.

1852.

01 OCT. 2012

Verna

DONACION
I

QB301
M6

I-20835

Y40
Mo9c

ADVERTENCIA.

PARA la publicacion de esta obra que fué escrita como su título lo espresa, para servir de texto en las lecciones del curso de Geodesia que se da en el Colegio Nacional de Minería, se espidieron las órdenes respectivas á la estinguida junta de fomento y administrativa del mismo ramo, en tiempo del ministerio del Escmo. Sr. D. Luis de la Rosa y bajo el gobierno del Escmo Sr presidente D. Manuel de la Peña y Peña, á solicitud del cuerpo de profesores del Colegio mencionado; quienes se esforzaron por conseguirlas, con motivo á la sensible pérdida del autor de la referida obra, el Sr. D. Tomas Ramon del Moral, que la muerte les arresbató en 1847, animados del noble espíritu de honrar la memoria de su ilustrado y distinguido colega, mostrando al mismo tiempo con su empeño, la alta recomendacion que hacian de sus trabajos.

Motivos que no es del caso referir han retardado la impresion por cuatro años, con no poco perjuicio en los adelantos de los discípulos, quienes perdian un tiempo precioso en sacar copias del manuscrito original, saliendo siempre con la incorreccion que es consiguiente á tareas de esta especie.

Por fortuna el Esemo. Sr. D. J. Fernando Ramirez, actual ministro de relaciones, impuesto de los obstáculos que habian impedido su publicacion y convencido de la utilidad de la obra, la mandó imprimir desde luego por cuenta del Supremo Gobierno; en virtud de cuya disposicion sale hoy á luz pública.

Celo tan empeñoso por los adelantos de la instruccion científica, en ramos tan poco cultivados hasta ahora en México, es ciertamente digno de encomio y mucho mas aun lo seria si se estendiera á la conclusion de otra obra de un órden superior pero enlazada con los conocimientos, que la obra científica de que acabamos de hablar, tiene por objeto difundir, como es el acabar de establecer el monumento mas bello que pudiera elevarse á la ciencia, el interesante observatorio astronómico de Chapultepec.

No dudamos que la publicacion del curso de geodesia, será visto con interes por las personas iniciadas en la ciencia del ingeniero geógrafo; siendo, por otra parte, su principal mérito, el llenar el objeto con que fué escrito; á saber, completar la instruccion que en las aplicaciones de las matemáticas, adquieren los alumnos del mencionado colegio de Minería, con arreglo al plan de estudios que en él rige.

Cumple á nuestro propósito, antes de terminar esta breve advertencia, el tributar al Supremo Gobierno el debido homenaje, por la proteccion que constantemente ha dispensado á la escuela de Minas de México.

Julio 13 de 1852.

Los profesores de dicha escuela.

CAPITULO I.

Sobre la forma y las dimensiones de la tierra.

1. LA tierra, uno de los planetas de nuestro sistema astronómico, es un globo que gira alrededor de su eje polar. El tiempo que emplea en dar una vuelta es el día, durante el cual pasan sucesivamente los 360° del ecuador, y cada uno de ellos tiene 111.299 metros, suponiendo el radio de 6.376.986 (a). Toda la circunferencia, que es lo que camina un punto cualquiera del ecuador en las 24 horas del día, es de 40.067.788 metros; y así corresponden á una hora 1.674.000, que hacen 399,5 leguas mexicanas, de las que caben 26,63 en el grado (b).

(a) Usaré en todos los cálculos el metro por la incertidumbre que tenemos acerca de nuestra medida lineal. El valor legal de la vara mexicana es de 838 milímetros.

(b) Las leguas de que hablan los autores franceses tienen 2.250 toesas, y son de 25 al grado proximately.

2. Este cálculo aproximativo nos da una idea de la rotacion de la tierra, y nos hace juzgar que este globo con el transcurso de los siglos ha debido elevarse hácia el ecuador y comprimirse proporcionalmente en ambos polos, ya sea que en su principio haya estado líquido, ó que siempre haya tenido la solidez actual; pues siendo compresible la materia terrestre, esto basta para considerarla sujeta á las leyes de las fuerzas centrales.

3. Se sabe que todo cuerpo que se mueve velozmente alrededor de un centro adquiere fuerza centrífuga con la cual saldría por la tangente del círculo si dejare de obrar la que lo llama hácia el centro y que se espresa por la parte exterior de una secante, la cual se confunde con el seno verso en los ángulos muy pequeños. En un segundo de tiempo camina un punto del ecuador 465 metros, que se pueden suponer valor de la tangente; y entonces el cuadrado de este número dividido por el diámetro del ecuador da el cociente 0,01695 metros para espresar la fuerza centrífuga cuando la pesantez se espresa por 4,888 metros. Así, pues, la fuerza centrífuga en el ecuador es á la pesantéz como 0,01695 es con 4,888 :: 1 : 288,4. Algunos suben este último número á 289.

4. Para entender cómo ha podido la tierra aplanarse en los polos con el supuesto de haber estado líquida, imaginemos una columna muy delgada de la materia desde un punto del ecuador al centro del globo, y que doblándose aquí fuera á terminar en uno de los polos. Si la tierra estuviera en reposo serian unos mismos los efectos de la pesantéz en ambas direcciones, el radio del ecuador igual al del meridiano, y el globo terrestre seria por consiguiente una esfera; pero luego que se considera en movimiento giratorio sobre su eje polar se concibe que todas las par-

tículas de la columna que va desde el ecuador adquieren fuerza centrífuga que propende á alejarlas del centro de rotacion, lo que no puede suceder sino disminuyendo la estension de la parte que va del centro al polo, la cual está escenta de aquella fuerza. Lo que decimos de esta columna líquida se puede aplicar á todo el esferoide terrestre.

5. Pero las fuerzas centrífugas que adquieren las partículas de la columna ecuatorial son proporcionales á los radios de los círculos que estas describen, á sus distancias al centro de la tierra; y estas distancias forman progresion aritmética del centro á la circunferencia del propio modo que las fuerzas, y su término medio será la mitad de la que obra en un punto del ecuador, será la mitad de $\frac{1}{578}$, ó $\frac{1}{577}$. Además, como la fuerza centrífuga es opuesta á la pesantéz no podrian estar en equilibrio las dos columnas si no fuera una mas larga proporcionalmente que la otra, esto es, si el radio del ecuador no fuera $\frac{1}{578}$ mas largo que el radio polar.* Este resultado de *Huyghens* quiere decir que el diámetro del ecuador seria al eje de la tierra :: 578 : 577 si nuestro planeta hubiera estado líquido cuando empezó su movimiento giratorio. Tambien podemos juzgar que entónces no tendria desigualdad alguna la superficie de la tierra, antes bien se presentaria lisa y de uniforme curvatura en toda su estension. Pero si prescindimos de la supuesta liquidez, y solo concedemos á la materia terrestre la propiedad general de la compresibilidad; los efectos de la rotacion habrán sido comprimir los polos, elevar el ecuador, presentar la superficie con tropiezos ó desigualdades en virtud de las resistencias á obedecer las leyes de hidrostática, y que la diferencia entre los ejes no sea la misma que se determina en la hipótesi de la liquidez primitiva.

$$\begin{aligned} \text{radio polar} = R, \text{ radio ecuatorial} = R'. \quad R &= R' - \frac{R'}{578} & 578R &= 577R' \\ \frac{R}{R'} &= \frac{577}{578} & \frac{R'}{R} &= \frac{578}{577} & R' : R &:: 578 : 577 \\ & & R' : 2R &:: 578 : 577. \end{aligned}$$

6. En el cálculo de *Huygens* se supone tambien que la direccion de la pesantéz va segun el radio de la tierra, lo que no es admisible. Desde el momento en que perdió nuestro planeta en virtud de la rotacion su forma esférica ya se dirigió la pesantéz segun las normales de los diferentes puntos, las cuales no tienen la misma estension del radio sino las de los puntos situados en el ecuador, ó en ambos polos. Newton fundándose en este principio, y suponiendo homogenea toda la masa terrestre encontró que el aplanamiento polar no era de $\frac{1}{230}$, sino de $\frac{1}{236}$; y que la forma de la tierra era la de una elipsoide de revolucion.

7. *Clairault* demostró que no se podia admitir la homogeneidad de la masa terrestre que suponía Newton, fundándose en que el crecimiento de la pesantéz del ecuador al polo debia ser en tal caso de $\frac{1}{236}$, puesto que dicho crecimiento sigue la razon inversa de los radios; pero el péndulo solo indica $\frac{1}{195}$; y de esto dedujo que es mas densa la tierra en el interior que en la superficie. El propio autor demostró además que suponiendo líquida la superficie del globo cualquiera que sea la naturaleza del núcleo, ha debido tomar tal forma que el crecimiento de la pesantéz del ecuador al polo mas el aplanamiento debe ser una suma igual al doble del aplanamiento que resulta del cálculo de Newton. Para cifrar este principio en una ecuacion llamaremos a al dicho aplanamiento, con lo que

$$\frac{1}{195} + a = \frac{1}{236} \times 2, a = \frac{1}{304}$$

Tambien estableció *Clairault* este otro principio: el aplanamiento es igual á $\frac{5}{2}$ de la razon entre la fuerza centrífuga y la pesantéz en el ecuador menos el crecimiento de dicha pesantéz del ecuador al polo, esto es,

$$a = \frac{5}{2} \times \frac{1}{236} - \frac{1}{195} = \frac{1}{304}.$$

Se echa de ver que usando $\frac{1}{2000000}$ para la fuerza centrífuga, resultado que hemos obtenido antes,

$$a = \frac{1}{2000000}.$$

Laplace ha confirmado estos principios de Clairault.

8. Mr. Francoeur en su tratado de geodesia afirma que le primitiva liquidez de la tierra ha llegado á ser una verdad fuera de toda disputa, apoyándose en un discurso de Mr. Arago impreso en el *Annuaire* de 1834. Para ejercitar un poco el juicio de los estudiantes que saben aplicar la crítica á las opiniones de los sabios por mucho respeto que merezcan, copiaremos el discurso elegante de Mr. Arago.

“En el origen de las cosas estaba la tierra probablemente fundida por el fuego. Hoy conserva todavía una parte de su calor primitivo.—Habremos dado el primer paso hácia la demostracion de estas dos proposiciones capitales si conseguimos descubrir en qué estado, líquido ó sólido, se encontraba la tierra en el origen de las cosas.—Si la tierra estaba ya sólida cuando empezó á girar sobre su centro, la forma que tenia accidentalmente entonces *ha debido conservarse intacta poco mas ó menos á pesar del movimiento de rotacion.* No sería lo mismo en la suposicion contraria. Una masa fluida toma necesariamente con el tiempo la figura de equilibrio correspondiente á todas las fuerzas que la solicitan; pero enseña la teoría que una masa tal, supuesto primero homogenea, debe aplanarse en la direccion del eje de rotacion, y elevarse en el ecuador: ella da la diferencia entre las estensiones de los dos diámetros, y hace conocer que en el estado final de equilibrio, la figura general de la masa es la de un elipsoide; señala las modificaciones que pueden resultar en las hipótesis fi-

sicas mas verosímiles, de un defecto de homogeneidad de las capas líquidas. Todos estos resultados convienen maravillosamente en cuanto á su conjunto, y aun en cuanto á sus valores numéricos con las numerosas medidas de la tierra que se han hecho en ambos hemisferios. Tal conveniencia no podria ser puro efecto de casualidad.

Luego la tierra ha estado antiguamente líquida.

9. Antes de continuar el discurso se nos permitirá observar que todo el raciocinio de Mr. Arago se funda en una proposicion que debia demostrarse, tal es que *la tierra sólida ha debido conservarse intacta poco mas ó menos á pesar del movimiento de rotacion*. Pero esta proposicion no se puede demostrar; antes demuestra la razon y comprueba la esperiencia lo contrario. Los anillos de metal que se sujetan á la rotacion en las clases de física para manifestar los efectos de las fuerzas centrales son de materia sólida: cuando en un edificio se desploman hácia dentro las paredes exteriores, forman las interiores curvas á pesar de la solidez de la mampostería; y como estos hechos se podrian citar otros varios. Luego no hay razon para concluir que la tierra ha estado antiguamente líquida. Ademias, la palabra *intacta* nos da la idea de una cosa en toda su integridad sin menoscabo alguno, y esta idea se destruye por el *poco mas. ó menos* siguiente. Esto manifiesta que suele deslizarse la pluma de un sabio cuando pretende demostrar lo que solo puede admitirse como hipótesi en caso de urgente necesidad. No es la tierra un elipsoide de revolucion segun los resultados de las medidas practicadas hasta ahora, que no son muchas pues no pasan de diez y siete, como se verá despues, aunque no haya inconveniente en suponerlo para las operaciones geodésicas; tampoco dan las medidas un mismo aplanamien-

to, ni el que resulta en término medio es igual para los dos hemisferios. En una masa líquida se colocan las materias diferentes por el orden de sus pesos específicos; pero si esta masa se sujeta á una violenta rotacion el orden se invierte, los mas pesadas ocupan la parte superior: lo contrario se verifica segun la esperiencia y los cálculos de los físicos. Luego no hay razones que apoyen la liquidez de la tierra en el origen de las *fosas*, antes parece que las hay para desechar esta hipótesi.

10. Sigue Mr. Arago: "Falta que descubrir la causa de esta antigua fluidez. He anunciado al principio de este capítulo que dicha causa era el fuego: pero *falta mucho para que los sabios estén de acuerdo en este punto*. Los geólogos de la escuela *Neptuniana* no han querido admitir mas que una fluidez acuosa. Segun ellos las materias terrestres cuyas propiedades son tan diversas, estaban originariamente disueltas en un líquido, y la masa sólida del globo se ha formado por depósito ó precipitacion. Los *Plutonianos* por su parte desechan toda idea de disolvente. Para ellos la fluidez de los principios constituyentes del globo fué en otro tiempo resultado de una temperatura muy alta. Las dos escuelas, casi he dicho las dos sectas por la acrimonia que mostraron, se combatieron por argumentos poco decisivos, dejando que los hombres rectos suspendieran sus juicios. El verdadero medio de terminar los debates era evidentemente ecsaminar si ecsistian en el interior del globo indicios ciertos del calor originario invocado por los plutonianos. Este es el problema que han resuelto satisfactoriamente los físicos y los geómetras por esfuerzos comunes.—En todos los lugares de la tierra, bajando á cierta profundidad, ya no experimenta el termómetro variacion diurna ni anual: señala

constantemente el mismo grado y fracción de grado durante todo el año, y durante todos los años. Este es el hecho. ¿Qué dice la teoría?

11. *Supongamos un momento que la tierra haya recibido todo su calor del sol.* El cálculo fundado sobre esta hipótesis nos enseña: 1º que á cierta profundidad será invariable la temperatura; 2º que esta temperatura solar del interior del globo cambia con la latitud. En ambos puntos están de acuerdo la teoría y la observación; pero debemos agregar que según la teoría la temperatura constante de las capas terrestres en cada clima, sería la misma á todas las profundidades, por lo menos no siendo estas muy grandes respecto al radio del globo. Pero todo el mundo sabe hoy que no es así. Las observaciones hechas en una multitud de minas, las observaciones de la temperatura del agua de muchas fuentes que vienen de diferentes profundidades están de acuerdo en dar un crecimiento de un grado centesimal para 20 ó 30 metros de profundidad. Cuando una hipótesis conduce á un resultado tan completamente discorde con los hechos, es falsa y debe desecharse.—Así, no es cierto que los fenómenos de temperatura de las capas terrestres puedan atribuirse á la sola acción de los rayos solares.”

12. Para convenir con Mr. Arago en esta conclusión, no se necesitan las razones que espone. Todos los físicos saben que no es el sol la única fuente de calor, como tampoco de luz. En las diversas reacciones que pueden tener las sustancias terrestres por su contacto con el aire se producen elevaciones de temperaturas, que no son producidas por los rayos solares, sin necesidad de apelar para explicarlas á un fuego central. La hipótesis de Descartes de un fuego inextinguible en el centro de la tierra cer-

cado de una roca inalterable para explicar el origen de las fuentes, no tiene defensores en el día. Tampoco se cree que las fuentes termales que brotan en algunas minas, y en la superficie de la tierra reciben su calor de esa fuente inextinguible; porque si fuera así, ¿por qué no serian calientes las aguas de todas las minas? Aunque las observaciones enseñen que en la profundidad de algunas minas no tiene variaciones el termómetro, esto no basta para establecer una regla general, principalmente cuando hay hechos que manifiestan lo contrario. En los planes de la mina de Valenciana tiene sus variaciones el termómetro, y aun muchas veces indica menor temperatura que la del aire en lo exterior; porque hay establecida una corriente de aire en las labores aun cuando la atmósfera esté tranquila. Estas son las razones que tienen los buenos geólogos para contentarse con referir los hechos, guardándose de elevar las hipótesis al rango de verdades. Por otra parte, si aumenta en lo general la temperatura en la profundidad de las minas, nada se puede inferir; porque se sabe que aumentan los grados del termómetro desde las altas regiones de la atmósfera hasta la superficie de la tierra, y no es extraño que continuen creciendo en lo interior de las minas, en donde estarán menos sujetos á las variaciones meteorológicas. Tampoco se estraña que la temperatura de una mina que tenga aguas termales sea mayor que la de otra en donde sean frias, aunque las dos minas tengan iguales profundidades. Así, pues, la hipótesi del fuego central no tiene en su favor razones que la hagan admisible, menos se puede establecer como verdad demostrada, ni produce utilidad alguna en las indagaciones sobre la verdadera figura del esferoide terrestre.

13. Continúa hablando Mr. Arago: "Una vez elimina-

da la accion solar no podrá ser otra la causa del erecimiento regular de calor que se observa en todo lugar á medida que se penetra en el interior del globo, que un calor propio, un calor de origen. La tierra, como quiere la escuela plutoniana, y como quisieron Descartes y Leibnitz, aunque unos y otros sin prueba alguna demostrativa, es ya hoy *un sol encostrado*, cuya alta temperatura podrá invocarse con intrepidez siempre que lo exija la esplicacion de los fenómenos geológicos."

14. No se puede eliminar la accion solar sin admitir un absurdo; porque es muy repugnante el creer que materias en contacto con la atmósfera terrestre, calentada por el sol aun en lo interior de las minas, no partieipen mas ó menos de su calor. La tierra misma calentada siempre en su superficie debe trasmitir su calor hasta una profundidad indefinida: esto es incontestable. Pero permitiendo la ninguna influencia de los rayos solares en el interior de la tierra, y conviniendo con el sabio astrónomo en que tiene su calor propio, su calor de origen; de tal antecedente no se infiere que el globo terrestre está fundido en su interior, ó que sea *un sol encostrado*. Cuando un sabio tan ilustre como lo es Mr. Arago aconseja el invocar la alta temperatura de la tierra, su fusion ignea para esplicar los hechos geológicos es de creer que algunos estudiantes quieran que su entendimiento repose, ateniéndose á la fácil esplicacion aunque no sea la mas satisfactoria; y esto puede contribuir á detener los progresos de la ciencia haciendo geólogos sistemáticos.

15. Concluiremos este asunto con exhortar á los estudiantes, sin pretender esclavizar su entendimiento, á que hagan la siguiente reflexion: si la tierra ha estado fundida en el origen de las cosas ha debido tomar la forma de

un elipsoide de revolucion, *y no otra*; pero la tierra no es un elipsoide de revolucion, sino un esferoide irregular: y así, la tierra no habrá estado fundida. Demostraremos luego la primera proposicion; la segunda está demostrada por los trabajos geodésicos que se verán al fin de este capítulo, y por la conviccion de los sabios. El propio Mr. Francoeur, despues de insertar el discurso que nos ha ocupado, y cuyas conclusiones erce evidentes, se espresa así: “Se han emprendido grandes trabajos con este fin (determinar la forma de la tierra) en diferentes lugares con inmensos gastos proporcionados por los gobiernos; y de esta multitud de esfuerzos ha resultado la certidumbre de que la tierra es un cuerpo irregular, aun haciendo abstraccion de las montañas y de las cavidades, que no son mas que accidentes mínimos de localidades.”

16. Sea que la materia terrestre haya estado fundida, que solo su superficie homogenea se haya encontrado líquida por cualquiera causa, ó reblandecida y dotada de la movilidad necesaria para obedecer á las leyes de hidrostática; determinaremos por medio del cálculo la forma que ha debido tomar en fuerza de la rotacion. Sean x, y, z las coordenadas rectangulares de un punto sea el que fuere de la superficie del globo, y P, Q, R las fuerzas que lo solicitan en direcciones paralelas á las coordenadas; será la ecuacion del equilibrio de la superficie

$$f(Pdx + Qdy + Rdz) = c = \text{constante } (c).$$

(c) Como no todos los lectores habrán hecho un estudio completo de mecánica, será conveniente que en los tratados vean el establecimiento de esta ecuacion general. Los mas instruidos podrán leer el libro 3º de la Mecánica celeste.

Pero suponiendo iguales todos los meridianos para aplicar á la superficie lo que resulte para cada uno de ellos, se podrá prescindir del término Rdz , y entonces

$$\int (Pdx + Qdy) = c.$$

Con el objeto de determinar P , Q supongamos un cuadrante del meridiano $P M A$, (fig. 1); que $C P$ sea el semieje de rotacion, ó de las y ; $C A$ el radio del ecuador, ó semieje de las x ; M una partícula ó sea un punto de la superficie de la tierra. Las fuerzas P , Q obrarán en las direcciones $M O$, $M P'$, y estas líneas podrán representar dichas fuerzas. La partícula M está sujeta á la atraccion hácia el centro C , y á la fuerza centrífuga alrededor de la $P C$ siendo $M O$ como radio. Pero ya que las atracciones están en razon inversa de los cuadrados de las distancias al centro, si llamamos K la atraccion del punto M á una distancia expresada por 1, y r el radio $C M$, habrá esta proporcion.

$$1 : \frac{1}{r^2} :: K : \frac{K}{r^2};$$

esta será la atraccion de la partícula M á la distancia $C M = r$. Esta fuerza centrípeta por $C M$ se descompone en dos, por $M O$ y por $M P'$, que son x , y ; $M O = \text{sen. } M C O$, $M P' = \text{sen. } M C P'$. En los triángulos rectángulos $M C O$, $M C P'$.

$$\begin{aligned} M C : 1 :: M O : \text{sen. } M C O, \\ r : 1 :: x : \text{sen. } M C O = \frac{x}{r}; \\ M C : 1 :: M P' : \text{sen. } M C P', \\ r : 1 :: y : \text{sen. } M C P' = \frac{y}{r} \end{aligned}$$

Multiplicando la fuerza $\frac{K}{r^2}$ por las distancias $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ se ten-

$$\frac{1}{r^2} K :: \frac{1}{r^2} :: x = \frac{x}{r^2}.$$

$$\frac{K}{r} + \frac{fr^2 \cos^2 t}{2} = K$$

En cualquier esferoide es el radio C M mayor que el radio C P; por lo que siendo u una cantidad variable en cada punto del meridiano será en general $r = 1 + u$, y substituyendo,

$$\frac{K}{1+u} + \frac{f \cos^2 t (1+u)^2}{2} = K,$$

$$\frac{1}{2} f \cos^2 t = \frac{Ku}{(1+u)^3} = Ku (1+u)^{-3},$$

$$\frac{1}{2} f \cos^2 t = K (u - 3u^2),$$

tomando solo dos términos de la serie considerando que u es siempre una cantidad muy pequeña; y aun se puede despreciar el término $3u^2$ para obtener la ecuacion aproximativa

$$Ku = \frac{1}{2} f \cos^2 t;$$

y de aquí, poniendo por u su valor $r - 1$,

$$r = 1 + \frac{f}{2K} \cos^2 t.$$

Esta ecuacion pertenece próximamente á una elipse (d); y así el esferoide terrestre se acerca en su forma á la de un elipsoide de revolucion, segun la teoría fundada en la perfecta movilidad de las partículas terrestres cuando empezó el movimiento de rotacion.

(d) En toda elipse es la ecuacion de un radio $r^2 = x^2 + y^2 =$

$$x^2 + \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2} = \frac{a^2 x^2 + a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2} = \frac{x^2 (a^2 - b^2) + a^2 b^2}{a^2}.$$

Escribiendo c^2 por $a^2 - b^2$, se tendrá

$$r^2 = \frac{c^2 x^2 + a^2 b^2}{a^2} = b^2 + \frac{c^2}{a^2} \times x^2$$

17. En el cálculo anterior nos hemos contentado con una primera aproximación despreciando el término $-3u^2$ para el valor de Ku . Vamos á aproximarnos mas. De la ecuación $\frac{1}{2} f \cos^2 t = K(u - 3u^2)$ se despeja

$$u = \frac{f}{2K} \cos^2 t + 3u^2,$$

y para u^2 tomaremos el que da la ecuación $Ku = \frac{1}{2} f \cos^2 t$, esto es,

$$u = \frac{f}{2K} \cos^2 t$$

$$u^2 = \frac{f^2}{4K^2} \cos^4 t$$

Sustituyendo en $r = 1 + u$ el primer valor de u , y despues el de u^2 se tendrá sucesivamente

$$r = 1 + \frac{f}{2K} \cos^2 t + 3u^2$$

$$r = 1 + \frac{f}{2K} \cos^2 t + \frac{3f^2}{4K^2} \cos^4 t.$$

Pero $\cos^4 t = \cos^2 t (1 - \sin^2 t) = \cos^2 t - \cos^2 t \sin^2 t$; luego

$$r = 1 + \frac{f}{2K} \cos^2 t + \frac{3f^2 \cos^2 t}{4K^2} - \frac{3f^2}{4K^2} \cos^2 t \sin^2 t:$$

$$\frac{3f^2}{4K^2} \cos^2 t \sin^2 t = \frac{3f^2}{16K^2} (2 \cos t \sin t)^2.$$

y suponiendo que el semieje menor sea igual con 1

$$r^2 = 1 + \frac{c^2}{a^2} x^2,$$

$$r = (1 + \frac{c^2}{a^2} x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{c^2}{2a^2} x^2$$

tomando dos términos de la potencia. Pero x es el coseno del ángulo t de inclinación de un radio r sobre el eje de las x , y así

$$r = 1 + \frac{c^2}{2a^2} \cos^2 t.$$

Se ve, pues que nuestra ecuación $r = 1 + \frac{f}{2K} \cos^2 t$ pertenece á

una elipse en donde $\frac{c^2}{2a^2} = \frac{f}{2K}$.

habiendo multiplicado por 4 numerador y denominador, y poniendo la raíz entre paréntesis: además $2 \cos.t \sin.t = \sin 2 t$, y así

$$r = 1 + \frac{f}{2K} \cos^2 t + \frac{3f^2}{4K^2} \cos^2 t - \frac{3f^2}{16K^2} \sin^2 2t =$$

$$1 + \left(\frac{f}{2K} + \frac{3f^2}{4K^2} \right) \cos^2 t - \frac{3f^2}{16K^2} \sin^2 2t.$$

Esta es la ecuacion del meridiano con mas aproximacion que la otra. Si el ángulo t de inclinacion es de 90° , el punto M (fig. 1) estará en el polo P, el radio CM estará sobre CP = 1, pues que entonces $\cos^2 t = 0$, $\sin^2 2t = 0$. Si $t = 0$, como $\cos^2 t = 1$ y $\sin^2 2t = 0$, el punto estará en A, y el radio será el del ecuador = CA = $r = \frac{f}{2K} + 1 + \frac{3f^2}{4K^2}$. De esto se infiere que la tierra está comprimida en los polos, pues el radio del ecuador es mayor que el del meridiano en la razon de $1 + \frac{f}{2K} + \frac{3f^2}{4K^2}$ á 1, ó :: $1 + \frac{f}{2K}$: 1 ateniéndonos á la primera ecuacion. Si $f = \frac{4 \cdot 8 \cdot 8}{2 \cdot 8 \cdot 8}$, $\frac{f}{2K} = 0,001736$, $1 + \frac{f}{2K} = 1,001736 = 1 + \frac{1}{576}$, que es el aplanamiento suponiendo homogenea la masa terrestre; esto es, que el radio del ecuador es $\frac{1}{576}$ mayor que el radio polar. Si hubiéramos introducido $f = \frac{1}{2 \cdot 8 \cdot 9}$ K habria resultado $a = \frac{1}{576}$ con muy corta diferencia. Por consiguiente, el término $\frac{3f^2}{4K^2}$ es despreciable, y podremos tomar por ecuacion del meridiano la primera

$$r = 1 + \frac{f}{2K} \cos^2 t.$$

En estos cálculos se ha supuesto que la pesantez se dirige al centro de la tierra.

18. Aunque los resultados de las operaciones geodésicas confirman que la tierra es un esferoide irregular, co-

mo su forma se acerca á la de un elipsoide por la depression de los polos y elevacion del ecuador; no hay inconveniente en calcular todas sus dimensiones considerándolo como tal; pues los resultados que se obtienen calculando en esta hipótesi tienen la exactitud que en la práctica se necesita. Vamos, pues, á establecer varias fórmulas relativas al elipsoide terrestre. Sea M (fig. 2) un punto de la superficie de la tierra, PMA un meridiano, MQ la normal sobre el eje de las abscisas ó sobre el radio del ecuador, MR. la normal sobre el eje de las ordenadas ó sobre el eje polar: la primera n la llamaremos pequeña normal, y la segunda N grande normal. La inclinacion de la normal sobre el plano del ecuador, esto es, el ángulo $MQA = MRS = L$ es la *latitud geográfica* del punto M: porque siendo TMT' la horizontal de dicho punto es P'KT' su altura de polo $= RKM$; pero RKM es complemento de KRM , como tambien lo es $MRS = MQA$; luego $P'KT' = MRS = L$ latitud geográfica. El ángulo MCA , que forma un radio central MC con el plano del ecuador, es la *latitud geocéntrica* del propio punto; la llamaremos l , y será $MCA = MRS - CMR$, ó $l = L - CMR$.

19. Suponiendo el semieje mayor de un meridiano, como $CA = a$, el semieje menor $CP = b$, será la ecuacion de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2.$$

Diferenciando resulta

$$a^2 y dy = - b^2 x dx,$$

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

En general se sabe que $-\frac{dx}{dy}$ espresa la tangente del ángulo opuesto á dx en el triángulo infinitesimal formado por $-dx, dy, du$, y este ángulo es igual al que forma el radio en un círculo, ó la normal en la elipse con el eje de las x ; es por consiguiente la latitud geográfica, que hemos llamado L . Tenemos, pues,

$$dy : -dx :: 1 : \text{tang } L; -\frac{dx}{dy} = \text{Tang. } L = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Los triángulos rectángulos MQF, MRS dan

$$\begin{aligned} M Q &= n : 1 :: M F = y : \text{sen. } MQF = \text{sen } L, \\ y &= n \text{ sen } L; \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = M R : 1 :: R S = C F = x : \text{cos } M R S = \text{cos } L, \\ x &= N \text{ cos. } L \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuacion $\frac{a^2 y}{b^2 x} = \text{tang. } L$ primero el valor de x y despues el de y , teniendo presente que $\text{cos.} \times \text{tang.} = \text{sen.}$, y $\frac{\text{sen.}}{\text{tang.}} = \text{cos.}$; resultan otros dos valores

$$y = \frac{b^2}{a^2} N \text{ sen } L, \dots\dots\dots (3)$$

$$x = \frac{a^2}{b^2} n \text{ cos. } L \dots\dots\dots (4)$$

Con la mira de determinar las normales N, n substituiremos en la ecuacion de la elipse los valores de y, x para no tener en las ecuaciones mas que cantidades conocidas como son los semiejes y la latitud. Primero para la grande normal, los valores (2) (3) dan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{N^2 \text{cos}^2 L}{a^2} + \frac{b^2 N^2 \text{sen}^2 L}{a^4} = 1,$$

$$N^2 \left(\frac{\text{cos}^2 L}{a^2} + \frac{b^2 \text{sen}^2 L}{a^4} \right) = 1,$$

$$N^2 (a^2 \text{cos}^2 L + b^2 \text{sen}^2 L) = a^4;$$

y como $\text{cos}^2 L = 1 - \text{sen}^2 L$

$$N^2 (a^2 (1 - \text{sen}^2 L) + b^2 \text{sen}^2 L) = a^4,$$

$$N^2 \{ a^2 - (a^2 - b^2) \text{sen}^2 L \} = a^4,$$

Poniendo despues en la propia ecuacion de la elipse los valores (1) (4) que contiene la pequeña normal, se deduce

$$n^2 \{ a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 L \} = b^4$$

De estas ecuaciones de a^4 y b^4 se podrian despejar N , n en cantidades conocidas; porque siempre se puede determinar la latitud de un lugar de la tierra, y como el radio del ecuador a es conocido, y la cantidad del aplanamiento tambien resulta b conocido. Estas fórmulas serian complicadas; vamos á simplificarlas introduciendo la excentricidad.

20. Sea $Cf = c$. El cociente de esta c dividida por a será lo que llamaremos excentricidad de la tierra, y la expresaremos por e ; de modo que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

$$b^2 = a^2 (1 - e^2),$$

$$e^2 a^2 = a^2 - b^2.$$

Para eliminar b^2 introduciremos su valor, así como el de $a^2 - b^2$ en las ecuaciones de a^4 y b^4 , con lo que primero

$$N^2 (a^2 - a^2 e^2 \operatorname{sen}^2 L) = a^4,$$

$$N^2 = \frac{a^4}{a^2 - a^2 e^2 \operatorname{sen}^2 L} = \frac{a^4}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)},$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

y despues

$$n^2 (a^2 - a^2 e^2 \operatorname{sen}^2 L) = a^4 (1 - e^2)^2$$

$$n^2 = \frac{a^4 (1 - e^2)^2}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)},$$

$$n = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)^{1/2}}.$$

Habiendo introducido la excentricidad, es menester determinarla del modo mas sencillo.

21. Se ha dicho al principio del capítulo que el aplamamiento del esferoide terrestre es la diferencia entre los radios del ecuador y polar, tomando el primero por unidad: por consiguiente si llamamos a el dicho aplamamiento,

$$a = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{3} \frac{1}{0.2}$$

segun el teorema de Clairault. De aquí viene que $a - b = a a$, $b = a - a a$, $\frac{b}{a} = 1 - a$, $\frac{b^2}{a^2} = (1 - a)^2$; y como tambien $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$ por el artículo precedente.

$$1 - e^2 = (1 - a)^2 = 1 - 2a + a^2,$$

$$e^2 = 2a - a^2,$$

$$e = \sqrt{(2a - a^2)}.$$

Este seria el valor de la excentricidad con toda exactitud, pero como a es un quebrado de valor muy pequeño se puede prescindir de su cuadrado a^2 , y entonces

$$e^2 = 2a,$$

lo que está diciendo que *el cuadrado de la excentricidad es doble del aplamamiento*.

22. Para determinar un radio central CM, (fig. 2), á quien llamaremos solamente radio = R á distincion de los radios vectores, recordaremos que en toda elipse se verifica $R^2 = x^2 + y^2$. Si en esta ecuacion introducimos los valores (2) (3) de x, y , que contienen á la grande normal, resulta

$$R^2 = N^2 \cos^2 L + \frac{b^4}{a^4} N^2 \sin^2 L;$$

$$\text{y como } N^2 = \frac{a^4}{a^2 - a^2 e^2 \sin^2 L},$$

$$R^2 = \frac{a^2 \cos^2 L}{1 - e^2 \sin^2 L} + \frac{b^4 \sin^2 L}{a^2 (1 - e^2 \sin^2 L)};$$

multiplicando numerador y denominador del primer término del segundo miembro por a^2 ,

$$R^2 = \frac{a^4 \cos^2 L + b^4 \sin^2 L}{a^2 (1 - e^2 \sin^2 L)};$$

pero $\cos^2 L = 1 - \sin^2 L$, luego

$$R^2 = \frac{a^4 - (a^4 - b^4) \sin^2 L}{a^2 (1 - e^2 \sin^2 L)};$$

y siendo tambien $b^2 = a^2 (1 - e^2)$, y

$$b^4 = a^4 (1 - e^2)^2,$$

$$a^4 - b^4 = a^4 - a^4 (1 - e^2)^2 =$$

$$a^4 \{1 - (1 - e^2)^2\} = a^4 (2e^2 - e^4),$$

escribiendo el valor final de $a^4 - b^4$,

$$R^2 = \frac{a^4 - a^4 (2 e^2 - e^4) \operatorname{sen}^2 L}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)} =$$

$$\frac{a^2 - a^2 (2 e^2 - e^4) \operatorname{sen}^2 L}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L} =$$

$$\frac{a^2 \left\{ 1 - (2 e^2 - e^4) \operatorname{sen}^2 L \right\}}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L} =$$

$$\frac{a^2 (1 - 2 e^2 \operatorname{sen}^2 L + e^4 \operatorname{sen}^2 L)}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}.$$

La excentricidad $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ es muy pequeña, y sin error considerable se puede despreciar el término $e^4 \operatorname{sen}^2 L$; así,

$$R^2 = \frac{a^2 (1 - 2 e^2 \operatorname{sen}^2 L)}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}.$$

$$a^2 (1 - 2 e^2 \operatorname{sen}^2 L) (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)^{-1}$$

formando la potencia, hasta el segundo término, multiplicando y reduciendo

$$R^2 = a^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L - 2 e^4 \operatorname{sen}^4 L) :$$

tambien $2e^4 \operatorname{sen}^4 L$ es despreciable por su extrema pequeñez; y así,

$$R^2 = a^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L),$$

$$R = a \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}.$$

Mr. Francoeur da á esta espresion la forma

$$R = a\sqrt{1 - \frac{e^2(1 - e^2) \operatorname{sen}^2 L}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}} =$$

$$a\sqrt{\frac{1 - e^2(2 - e^2) \operatorname{sen}^2 L}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}}.$$

Estos dos valores de R son los calculados por Mr. Puisant, pero el primero $a\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}$, que proporciona exactitud es necesaria en la práctica, tiene la ventaja de la sencillez.

23. Ahora ya es fácil establecer fórmulas para espresar las otras líneas. La subnormal

$$QF = n' = n \cos L = \frac{a(1 - e^2) \cos L}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)^{\frac{3}{2}}}$$

la tangente

$$TM = T = \frac{y}{\cos L} = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen} L}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)^{\frac{3}{2}} \cos L} =$$

$$\frac{a(1 - e^2) \operatorname{tang} L}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)^{\frac{3}{2}}},$$

porque en el triángulo rectángulo TMF, $TM : 1 :: MF :$

$\cos TMF$, ó $T : 1 :: y : \cos L$, $T = \frac{y}{\cos L}$, siendo $y =$

$n \operatorname{sen} L$.

La subtangente

$$FT = T' = T \operatorname{sen} L = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{tang} L \operatorname{sen} L}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)^{\frac{3}{2}}}.$$

11. Tangente en un punto para la hipocicloide por: $R^2 = \frac{a^2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L - e^4 \operatorname{sen}^4 L + e^6 \operatorname{sen}^6 L)}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}$

$$\frac{a^2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L} + \frac{a^2(-e^2 \operatorname{sen}^2 L + e^4 \operatorname{sen}^4 L)}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L} = a^2 \left(\frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L - e^4 \operatorname{sen}^4 L}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L} \right) =$$

$$\frac{a^2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L(1 - e^2))}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L} = R^2. \text{ Resolviendo } R = a \sqrt{\frac{1 - e^2(1 - e^2) \operatorname{sen}^2 L}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}}$$

la distancia

$$CQ = x - n' = x - \frac{a(1 - e^2) \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$N \cos L - \frac{a(1 - e^2) \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{a \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a(1 - e^2) \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$CQ = \frac{a e^2 \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}.$$

En el triángulo rectángulo CQR, $CQ : CR = 1 : \text{tang. } L$.
 $CQR = \text{tang. } L$; y así

$$CR = CQ \text{ tang. } L = \frac{a e^2 \sin L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

24. Antes de pasar adelante compararemos el radio y la grande normal de un punto de la superficie de la tierra:

$$R : N :: a (1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}} : \frac{a}{[1 - e^2 \sin^2 L]^{\frac{1}{2}}}$$

$$:: (1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}} : \frac{1}{[1 - e^2 \sin^2 L]^{\frac{1}{2}}}$$

$$:: 1 - e^2 \sin^2 L : 1.$$

Así, pues, la grande normal de un punto de la tierra es siempre mayor que el radio del mismo punto una cantidad espresada por el producto del doble aplanamiento, y del cuadrado del seno de la latitud. También se tiene

$$R \times N = a (1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}} \times \frac{a}{[1 - e^2 \sin^2 L]^{\frac{1}{2}}} = a^2,$$

y de aquí la proporción

$$R : a :: a : N;$$

luego el radio del ecuador es medio proporcional entre el radio y la grande normal de cualquier punto de la tierra.

25. Veremos de paso cuál es la razón que guardan un radio de la tierra y el radio medio á 45° de latitud, en la cual son iguales el seno y el coseno: se tiene $\text{sen}^2 L = \cos^2 L$, $\text{sen}^2 L + \cos^2 L = 2 \text{sen}^2 L = 1$, y $\text{sen}^2 L = \frac{1}{2}$; y entonces.

$$\text{á } 45^\circ R'^2 = a^2 (1 - e^2 \text{sen}^2 L) = a^2 (1 - \frac{e^2}{2}).$$

$$\text{Será, pues, la razón } \frac{R^2}{R'^2} = \frac{a^2 (1 - e^2 \text{sen}^2 L)}{a^2 (1 - \frac{e^2}{2})} =$$

$$(1 - e^2 \text{sen}^2 L) (1 - \frac{e^2}{2})^{-1}$$

formando la potencia hasta el segundo término y multiplicando,

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1 - e^2 \text{sen}^2 L + \frac{e^2}{2} - \cancel{e^4 \text{sen}^2 L};$$

despreciando el término en e^4 , atendiendo á que $1 - e^2 \text{sen}^2 L + \frac{e^2}{2} = 1 + \frac{e^2}{2} (1 - 2 \text{sen}^2 L)$, y á que $1 - 2 \text{sen}^2 L = \cos 2L$, (e) se tendrá por último

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1 + \frac{e^2}{2} \cos 2L,$$

$$\frac{R}{R'} = (1 + \frac{e^2}{2} \cos 2L)^{\frac{1}{2}};$$

esta es la razón buscada.

(e) En efecto $\cos 2L = \cos^2 L - \text{sen}^2 L$; pero $\cos^2 L = 1 - \text{sen}^2 L$ luego $\cos 2L = 1 - 2 \text{sen}^2 L$.

26. En la elipse, así como en las otras curvas de segundo grado, es el radio de curvatura ρ igual al cubo de la normal dividido por el cuadrado del semiparámetro, que es $\frac{b^2}{a}$ cuando la normal es al semieje mayor; y así

$$\rho = \frac{n^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2} = \frac{a^3(1-e^2)^3}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}} \div \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$$

pero $\frac{b^2}{a} = a(1-e^2), \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 = a^2(1-e^2)^2$, luego

$$\rho = \frac{a^3(1-e^2)^3}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{a^2(1-e^2)^2},$$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}.$$

Esta es la ecuacion general del radio de curvatura para todo punto del esferoide terrestre, cuya latitud es L .

27. En el triángulo MCf formado por el radio $MC = R$, por el radio vector $Mf = r$, y por $Cf = c$, [fig. 2]; llamando l el ángulo MCf , que es la latitud geocéntrica, se tiene

$$r^2 = R^2 + c^2 - 2Rc \cos l,$$

ecuacion relativa á la resolucion de los triángulos rectilíneos. En CMF $x = R \cos l$, y en MRS $x = N \cos L$; y así, $R \cos l = N \cos L$. Sustituyendo en la ecuacion de r^2 ($N \cos L$) por ($R \cos l$) viene

$$r^2 = R^2 + c^2 - 2Nc \cos L;$$

poniendo por R, N sus valores, por e el suyo $\sqrt{a^2 - b^2}$, y por e^2 $a^2 e^2$,

$$r^2 = a^2(1 - e^2 \sin^2 L) + a^2 e^2 \pm \frac{2a^2 e \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}};$$

el signo — del último término corresponde al radio vector Mf'' que se calcula por el triángulo MCf'' , en donde es negativo el coseno de MCf'' . Haciendo la multiplicacion, introduciendo $\cos^2 L$ en lugar de $1 - \sin^2 L$, y sacando el factor comun, se tiene sucesivamente

$$r^2 = a^2 - a^2 e^2 \sin^2 L + a^2 e^2 \pm \frac{2 a^2 e \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}},$$

$$r^2 = a^2 + a^2 e^2 (1 - \sin^2 L) \pm \frac{2 a^2 e \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}},$$

$$r^2 = a^2 (1 + e^2 \cos^2 L \pm \frac{2 e \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}})$$

Por esta ecuacion se pueden determinar los radios vectores de cualquiera punto de la tierra. Notaremos que la ecuacion $R \cos l = N \cos L$ da la siguiente analogía:

$$R: N :: \cos L: \cos l,$$

esto es, que *el radio es con la normal de un punto como el coseno de la latitud geográfica al coseno de la latitud geocéntrica*, ó que aquellas dos líneas son recíprocamente proporcionales á los cosenos de sus inclinaciones sobre el plano del ecuador.

28. El ángulo $C M R$ que hace la vertical de un pun-

to M con el radio CM es la diferencia de las latitudes L, l; porque MQF = MCF + CMR, ó CMR = MQF — MCF = L — l: llamemos λ este pequeño ángulo CMR, será

$$\lambda = L - l,$$

$$\text{tang. } \lambda = \text{tang. } (L - l) = \frac{\text{tang } L - \text{tang } l}{1 + \text{tang } L \text{ tang } l};$$

pero en el triángulo rectángulo MCF se tiene $x : y :: 1 :$
 $\text{tang } l = \frac{y}{x}$, luego

$$\text{tang } \lambda = \frac{\text{tang } L - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \text{ tang } L}$$

Las ecuaciones (2) (3) (núm. 19) dan los valores de y, x en L, de modo que $\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2} \text{ tang } L$; y así

$$\text{tang } \lambda = \frac{\text{tang } L - \frac{b^2}{a^2} \text{ tang } L}{1 + \frac{b^2}{a^2} \text{ tang}^2 L} =$$

$$\frac{(a^2 - b^2) \text{ tang } L}{a^2 + b^2 \text{ tang}^2 L}.$$

29. Sea u un arco de meridiano terrestre desde el ecuador hasta la latitud L; su diferencial será du . En el triángulo infinitesimal se tiene siempre $du : -dx :: 1 : \text{sen } L$, de donde

$$du = \frac{-dx}{\text{sen } L}.$$

Vamos á determinar dx en cantidades conocidas, para lo cual pondremos el valor de N en la ecuacion (2), y tendremos:

$$x = \frac{a \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}};$$

diferenciando esta ecuacion, multiplicando arriba y abajo por $(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}$, multiplicando los términos, poniendo $1 - \sin^2 L$ en lugar de $\cos^2 L$, haciendo la reduccion y sacando el factor comun, viene

$$dx = - \frac{a (1 - e^2) \sin L dL}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si sustituimos este valor de dx en la ecuacion de du , resultará

$$du = \frac{a (1 - e^2) dL}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}};$$

y como $\frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}$ es la espresion del radio de cur-

vatura, se deduce que *un arco pequeño del meridiano es igual al radio de curvatura multiplicado por la diferencia de las latitudes de los extremos de dicho arco*. Se puede dar á la fórmula una espresion mas sencilla, resultando su valor muy aproximado á la exactitud: pasando el denominador al numerador, ecaltando la potencia hasta los términos en e^2 y haciendo las multiplicaciones, resulta

$$du = adL (1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L).$$

Expresa du la distancia entre dos lugares cercanos sobre un mismo meridiano, siendo dL la diferencia de sus latitudes, y L la latitud del medio de la distancia.

30. Dos pequeñas distancias meridianas tomadas en diferentes lugares, pero con la circunstancia de que siendo las latitudes de sus medios L, L' sean $dL = dL'$; estarán en la razón de

$$adL \left(1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 L\right) : adL' \left(1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \times \operatorname{sen}^2 L'\right);$$

y como $adL = adL'$, y $1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2$ es una cantidad constante, se infiere la razón

$$\operatorname{sen}^2 L : \operatorname{sen}^2 L'.$$

Esto significa que *las extensiones lineales de los grados del meridiano crecen caminando del ecuador á los polos, y los crecimientos son como los cuadrados de los senos de las latitudes.*

31. Cuando se conoce du por una medición directa, se puede calcular el aplastamiento de los polos, despejando e^2 de la última ecuación de du :

$$e^2 = \frac{du - adL}{adL \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 L - 1\right)};$$

y ya se sabe que $e^2 = 2a$, ó mas exactamente $e^2 = 2a - a^2$. Si se ha medido un arco del meridiano y determinado las latitudes de sus extremos; la diferencia entre ellas será dL , su término medio L , y el número de metros ó de otra medida lineal será du . Se obtendrá, pues, el valor de e^2 , y de este el de $a = \frac{e^2}{2}$.

32. Pero si en vez de un grado meridiano se han medido dos á diferentes latitudes L, L' , serán $dL = 1^\circ = 60'$, $dL = dL'$, y du desigual con du' puesto que los grados crecen del ecuador á los polos. Por consiguiente, tomando dos términos de la serie del denominador en la primera ecuacion de du y du' , se tendrá

$$\frac{du}{du'} = \frac{a(1 - e^2) dL}{1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L} \times \frac{1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L'}{a(1 - e^2) dL'};$$

y como $dL = dL'$, $a(1 - e^2) dL = a(1 - e^2) dL'$, y

$$\frac{du}{du'} = \frac{1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L'}{1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L},$$

y de aquí despejando

$$e^2 = \frac{2}{3} \times \frac{au' - du}{du' \sin^2 L' - du \sin^2 L}.$$

Para mayor sencillez se puede poner 2^a en lugar de e^2 , y las iniciales g, g' por du, du' , y entonces

$$a = \frac{g - g'}{3(g' \sin^2 L' - g \sin^2 L)}.$$

Esta fórmula proporciona el aplanamiento con suficiente exactitud por un cálculo directo. Para ejercicio de los estudiantes pondremos dos ejemplos del cálculo numérico: compararemos primero el grado medido por Bouguer y La Condamine en el ecuador, esto es, á *cero* grados de latitud, con el medido en Laponia por Swamberg á $66^\circ 20' 10''$.

Grado en el ecuador = g = 110613 metros.

Grado en Laponia = g' = 111488

$$g' - g = \frac{875}{1}$$

$$L = 0$$

$$g \operatorname{sen} L = 0$$

$$\operatorname{Log.} 3 \dots\dots\dots 0,4771212$$

$$\operatorname{Log.} g' \dots\dots\dots 5,0462283$$

$$\operatorname{Log.} \operatorname{sen}^2 L' \dots\dots\dots 9,9237110$$

$$\operatorname{Log.} 3 g' \operatorname{sen}^2 L' \dots\dots 5,4470605 \dots\dots 279937$$

$$\frac{g' - g}{3 \operatorname{sen}^2 L'} = \frac{875}{279937} = \frac{1}{319,7} = a.$$

Si tomamos el grado medido á $1^\circ 31'$ de latitud, y el propio de Swamberg, tendremos

$$\text{Grado de Bouguer} \dots\dots\dots 110582 \dots \overset{m}{L} = 1^\circ 31'$$

$$\text{Grado de Swamberg} \dots\dots\dots 111488 \dots L' = 66.^\circ 20' 10''$$

$$g' - g \dots\dots\dots 906 \overset{m}{m}.$$

$$g \operatorname{sen}^2 L \dots\dots\dots 77,47$$

$$g' \operatorname{sen}^2 L' \dots\dots\dots 93526$$

$$g' \operatorname{sen}^2 L' - g \operatorname{sen}^2 L \dots\dots 93448,53$$

$$\times 3$$

$$\hline 280346$$

$$\frac{g' - g}{3(g' \sin^2 L' - g \sin^2 L)} = \frac{906}{280346} = \frac{1}{309,4} = a.$$

33. De la ecuacion $du = ad L (1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L)$ se despeja, poniendo g por du

$$a = \frac{g}{dL (1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L)}.$$

Por esta fórmula se calcula con suficiente exactitud el radio a del ecuador. Supongamos el grado de $1^\circ 30'$ de latitud, y el aplanamiento $\frac{1}{309}$ calculado últimamente;

$$e^2 = 2a = \frac{2}{309} = 0,0064725.$$

$$g = 110582 \text{ metros.}$$

$$L = 1^\circ. 31'$$

$$dL = 60' = 1^\circ.$$

$$\text{Log. } dL \text{ en partes del radio..... } 8,2418701$$

$$\text{Log. } (1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L) \text{..... } 9,9971829$$

$$\text{Log. denominador..... } 8,2390530$$

$$110582 \text{ numerador, log..... } 5,0436845$$

$$a = 6.377.222 \text{ metros, log..... } 6,8046315.$$

Para obtener toda la exactitud posible se puede calcular por la fórmula sacada de la primera ecuacion de du , y haciendo $e^2 = 2a - a^2$.

34. En la tabla siguiente, tomada de la Geodesia de Mr. Francœur, se ven los resultados de las operaciones hechas en diferentes puntos. He aumentado las dos últimas columnas: en una se muestra el aplanamiento en números que deben tener la unidad por numerador, y resulta comparando los diferentes grados con el medido en el ecuador; y la otra el que da la comparacion con el de $1^{\circ} 31'$ de latitud.

35. Si la tierra fuera esférica seria $e^2 = 0$, $a = R$, todos los círculos máximos iguales, así como los paralelos de iguales latitudes. En esta suposicion estableceremos otras fórmulas, recordando que si p es la semicircunferencia de un círculo de radio $=1$, y m un número de grados de estension lineal igual á la del radio, se tendrá

$$180^\circ : p :: m^\circ : 1,$$

$$m^\circ = \frac{180^\circ}{p},$$

$$m' = \frac{10800'}{p},$$

$$m'' = \frac{648000''}{p}.$$

Vamos á determinar primero la superficie de un cuadrilátero formado sobre la esfera por dos meridianos y dos paralelos.

36. Un punto de la tierra traza en virtud del movimiento de rotacion una circunferencia espresada por $2px$ siendo x su radio: ademas, un arco en ^{grados} longitud M tendrá ~~un número de grados~~ ^{longitud} que se determinan por esta proporcion, $360^\circ : 2px :: M : \frac{Mx}{180^\circ}$; y como la ecuacion $m^\circ = \frac{180^\circ}{p}$, $\frac{p}{180^\circ} = \frac{1}{m^\circ}$, resulta $\frac{p M x}{180^\circ} = \frac{M x}{m^\circ}$. Multiplicando esta cantidad por un elemento du se obtendrá un elemento de la superficie del cuadrilátero, y su integral dará la superficie. Será, pues,

$$s = \int \frac{M x}{m} \times du = \frac{M}{m} \int x du;$$

pero $du = \frac{ad L(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}$ (núm. 29), en donde $e^2 = 0$ por suposición, de lo cual resulta $du = ad L$, luego

$$s = \frac{M}{m} \int a x dL.$$

El valor de x se determina por el triángulo rectángulo TCQ (fig. 3) en donde el ángulo C es la latitud $= L$; porque

$$TC = a : 1 :: CQ = x : \cos L,$$

$$x = a \cos L.$$

Substituyendo en la ecuación de s ,

$$s = \frac{M}{m} \int a^2 \cos L dL = \frac{a^2 M}{m} \int \cos L dL = \frac{a^2 M}{m} \sin L.$$

Poniendo por último en lugar de m su valor $\frac{180^\circ}{p}$, la superficie del cuadrilátero esférico se tendrá por

$$s = \frac{a^2 p M \sin L}{180^\circ}.$$

Para toda una zona $M = 360^\circ$, y $s = 2a^2 p \sin L$; y para la esfera $M = 360^\circ$, $\sin L = 1$, y $s = 4a^2 p$ duplicando un hemisferio.

37. Suponiendo el radio del ecuador 6.376.986 metros, y el achatamiento $\frac{1}{309}$ se calcula el radio polar de 6.356.347; un medio aritmético entre éstos dos será el

valor de $a = 6.366.666$ metros, que introduciremos en la fórmula $2a^2 p \text{sen} L$.

Media zona tórrida.

Log. 2.....	0,3010300
log. a^2	3,6078244
$p = 3,1416$; log.....	0,4971509
log. $\text{sen. } 23^\circ 28'$	9,6001181
Suma, log.....	<u>14,0061234</u>

Este último logaritmo corresponde á 101.409.135.514.020 metros cuadrados, ó sean 10.140.913.551 hectaras; el duplo 20.281.827.102 hectaras será, pues, la superficie de toda la zona tórrida. Pero una hectara ó 10.000 metros cuadrados hacen 14240,064 varas cuadradas de México, por lo que la legua cuadrada mexicana contiene 1755.61 hectaras; y la zona tórrida es de 11.552.581.2 leguas cuadradas. Para una de las zonas templadas se haria $L = 66^\circ.32'$, y del resultado del cálculo se restaria la superficie de la tórrida; y para una de las glaciales $L = 90^\circ$, y se restarian las otras dos. Toda la tierra supuesta esférica, y con un radio medio entre el ecuatorial y el polar, tendria 29.009.507 leguas cuadradas de superficie.

38. Si se quiere introducir en la fórmula el aplana-
miento de los polos, de la ecuacion $b^2 = a^2(1-e^2)$ (núm. 21)
se sacará $a^2 = \frac{b^2}{1-e^2}$, y este valor se pondrá en dicha
fórmula, con lo que

$$s = \frac{a^2 p M \text{sen} L}{180^\circ} = \frac{b^2 p M \text{sen} L}{180(1-e^2)} = \frac{b^2 p M \text{sen} L (1+e^2)}{180}$$

pasando al numerador el binomio $1 - e^2$ y exaltando la potencia hasta el segundo término. Cuando $M = 360^\circ$ $s = 2b^2p \operatorname{sen} L (1 + e^2)$; y cuando se tiene además $\operatorname{sen} L = 1$ la fórmula para todo un hemisferio se reduce á

$$s = 2b^2p(1 + e^2), \text{ y}$$

$$s = 4b^2p(1 + e^2)$$

para todo el esferoide terrestre. Con los datos que proporciona el número anterior calculemos la superficie de la zona tórrida por $2b^2p \operatorname{sen} L (1 + e^2)$:

Log. 2.....	0,3010300
log. b^2	3,6064152
log. p	0,4971509
log. $\operatorname{sen} 23^\circ 28'$	9,6001181
$1 + e^2 = 1,00648$; log.	0,0028051
	<hr/>
	14,0075193.

Este logaritmo corresponde á 101.746.465.116.279 metros cuadrados que hacen 10174646512 hectaras; el doble será la superficie de la zona tórrida = 20.349.293.024, ó 11.591.010 leguas cuadradas.

CAPÍTULO II.

Idea en general de las operaciones geodésicas, medición de bases y establecimiento de señales.

39. Cuando se mide una grande estension sobre la superficie de la tierra no basta encadenar los diferentes puntos por triángulos reetilíneos como se hace en topografía, sino por triángulos esféricos: los mas grandes se llaman de primer orden, sus vértices ó sean puntos de estacion, se colocan por lo comun en las cumbres de las montañas, y se procura que sus lados tengan la mayor estension posible adaptable al alcance de los anteojos de los

instrumentos. Dentro de estos triángulos se forman otros menores de segundo orden, y despues de tercero para conocer la posicion de todos los puntos, y poder situarlos en la carta. Cada uno de los puntos se determina por tres coordenadas rectangulares, la longitud, la latitud y la elevacion sobre el nivel del mar, aunque bastan las dos primeras para formar las cartas geográficas. El conjunto de todas las operaciones que se hacen para conocer estos triángulos, se llama *triangulacion*, y el dibujo sobre el papel de los triángulos principales ó de primer orden, *red*, ó mas propiamente *cadena geodésica*.

40. Para hacer una buena triangulacion hay que practicar las operaciones siguientes:

1.^o Medir exactamente en terreno plano, siempre que sea posible, una *base* sobre la cual se forme el primer triángulo, y se apoye toda la cadena; pero se recomienda el medir otra para terminar la triangulacion, porque entonces se pueden verificar todas las operaciones:

2.^o Establecer señales en los puntos elegidos con discernimiento para que los triángulos resulten bien conformados, con cuyo objeto se practica de antemano un reconocimiento del pais con buenos guias, y si es posible se forma un plano aproximativo sirviéndose de algunos instrumentos como el sextante, el compas azimutal, un goniometro, etc.; procurando siempre examinar las ventajas y los inconvenientes que ofrecen las diferentes estaciones para elegir las mejores:

3.^o Medir los ángulos con el círculo ó el teodolito repetidores, y aplicarles las correcciones necesarias para reducirlos al plano horizontal, al centro de estacion y de fase, y para convertirlos en ángulos de triángulos rectilíneos; se supone que el plano horizontal ha de ser continuacion del nivel del mar.

4.º Al tiempo de medir los ángulos de los triángulos tomar las distancias zenitales, ú observar la columna barométrica y la temperatura del aire para determinar las alturas ó diferencias de nivel de todas las estensiones:

5.º Elegir la proyeccion mas conveniente para situar todos los puntos determinados por la triangulacion.

DE LAS BASES.

41. Una base se ha de medir con extremo cuidado, porque apoyándose sobre ella toda una cadena de triángulos, cualquiera inexactitud en esta operacion fundamental de la geodesia influiria sobre toda la triangulacion. La base ha de estar en terreno plano, y se ha de medir en línea recta siempre que las circunstancias lo permitan, de doce á quince mil varas de estension; aunque siempre será mejor proporcionarla al primer triángulo que se forme con ella, para que resulte bien conformado. Despues de haber elegido el terreno se plantan estacas ó piquetes en toda la estension de la base, los cuales llevan puas de hierro para plantarlos en tierra, y miras ó puntos visuales en sus extremos: euando no haya estas miras construidas al efecto, bastará pintar de blanco los extremos superiores para que se puedan ver de lejos. Estos piquetes se alinean por pequeñas distancias, como de 200 en 200 varas, por medio de un instrumento bien arreglado, que lleve antejo de movimiento en el plano vertical, como es el teodolito. Siguiendo exactamente la direccion marcada se van colocando dos reglas de una estension conocida, que puede ser de cinco varas, una á continuacion de otra en posicion horizontal arreglada por medio de niveles; ó poco inclinadas, y en este caso es menester conocer la inelina-

cion de cada una para reducirla despues á la línea horizontal. Esta inclinacion se mide con un nivel de albañil dispuesto con un arco de círculo, sobre el cual se graban á uno y otro lado del *cero* algunos grados; y una alidada que corre libremente el arco en virtud de su propio peso lleva un nonius que señala los minutos de grado: el medio entre los ángulos tomados en posiciones contrarias del nivel señala la inclinacion de la regla. Se podria adoptar para mayor comodidad y exactitud un semicírculo de metal semejante al de los mineros, teniendo su alidada con el nonius diagonal inventado por el Sr. Navarro profesor de matemáticas; y con este nivel se obtendrian las fracciones de minutos. Una lámina de metal en la direccion del diámetro, y perpendicular al plano del instrumento serviria para ajustarla sobre la superficie superior de la regla.

42. Se echa de ver que la posicion horizontal de las reglas proporciona mayor exactitud que la inclinada, aunque sea necesario muchas veces emplear mas tiempo en la operacion. Si las desigualdades del suelo no permitieren poner la regla de adelante al tope con la de atras, se puede colgar una plomada del extremo de la mas alta, recibiendo el peso en un vaso de agua para evitar los movimientos que pudiera causar el viento: entonecs se pone la regla de adelante en contacto con el hilo, cuyo grueso debe estar determinado con toda escrupulosidad para llevarlo en cuenta; y la posicion horizontal se determina por medio de buenos niveles. Cada medida hecha con dos reglas la llamaremos *un par*, y el número total de pares será la estension de la base. Se asientan en un libro dispuesto con las columnas correspondientes el número de cada par y la temperatura del aire, aunque opinan los au-

tores ser mejor que cada regla lleve un termómetro unido; en este caso se asienta la temperatura media para cada par.

43. La operacion preliminar mas importante para medir las bases consiste en el arreglo de la unidad de medida lineal, que ha de servir para determinar la estension de las reglas. Esta unidad debe estar comparada y ajustada perfectamente con alguno de los marcos ó patrones mejor determinados: y teniendo el *metro* frances esta circunstancia, á él referiremos nuestra medida, para lo cual recordaremos lo que es dicho metro. Suponiendo $\frac{1}{366}$ el aplanamiento polar, se habia calculado que el cuadrante del meridiano terrestre tenia, 5130740 toesas: una diezmillonésima parte de este número es el *metro legal* referido siempre á 0° de temperatura, y es igual con 443,296 líneas del pié frances de la toesa llamada de la Academia, ó del Perú cuando es su temperatura de 13° de Reaumur ó 16,25 centesimales. De este metro legal se conserva un patron de platina. Por trabajos de Delambre se ha conocido despues que no es aquella la verdadera medida del cuadrante, sino 5.131.111 toesas: su diezmillonésima parte = 443,328 líneas es el metro verdadero ó *físico*.

44. Sean p , h , l , las dilataciones en longitud de la platina, del hierro forjado y del laton, metales de que se pueden formar las unidades lineales. Se tiene por cada grado del termómetro centesimal

$$\begin{aligned} p &= 0,0000085655 \\ h &= 0,0000122045 \\ l &= 0,0000187785. \end{aligned}$$

Si se forma un metro de platina perfectamente igual al patron no habrá necesidad de espresar la temperatura del

aire al tiempo de ajustarlo, porque las dilataciones ó contracciones serán iguales en ambos para iguales temperaturas; pero si el metro es de otro metal, es necesario grabar en él la temperatura al tiempo de tomar la marca, puesto que entonces no serán iguales las dilataciones. Hagamos el metro legal $= 1$ á la temperatura del hielo; á cualquiera otra t será su estension $1 + pt$, pues que $1^\circ : p :: t^\circ : pt$. Comparando con este metro una unidad lineal cualquiera, si se encuentra de n partes de dicho metro, la estension de nuestra unidad se espresará por $n(1 + pt)$ sea cual fuere t . Supongamos que á la temperatura de 23° se haya medido la vara de México de 0,838 del metro; su estension respecto al metro legal se espresará por $0,838(1 + pt) = 0,838(1 + 23 \times 0,0000085655)$, $= 0,838165 = 838,165$ milímetros. Pero si la copia fuera de metal diferente de la platina, la ecuacion tendria otro término: llamando en general D la diferencia entre la temperatura marcada y la que se tenga al hacer una comparacion, y d la dilatacion del metal, se tendrá la fórmula

$$v = n(1 + pt \pm Dd),$$

espresado por v una medida lineal cualquiera. Se toma el signo $+$ cuando se hace una comparacion á temperatura mayor que t , y $-$ cuando es menor. Sea por ejemplo $t = 10^\circ$ á cuya temperatura se ha formado un metro de hierro; su estension primitiva seria $1 + pt$ como ántes: comparando despues á 23° este con la vara y hallándola de 0,838 partes $= n$, tendríamos

$$V = 0,838(1 + 0,0000085655 \times 10 + 13 \times 0,0000122) = 0,8382047 = 838,2047 \text{ milímetros.}$$

45. Es claro que conocida la estension de una medida tomada con el metro á una temperatura cualquiera, se puede determinar la estension que debe tener para que sea igual á la del metro legal: todo consiste en hacer una proporcion. Si en el primero de los casos que hemos considerado hacemos

$$1 + pt : 0,838 :: 1 : \frac{0,838}{1 + pt} = 0,837928273$$

este cuarto término espresará el valor de la vara para que sea igual al metro legal, de modo que

$$\text{vara} = 837,928273 \text{ milim.} = \text{metro legal.}$$

En el segundo caso

$$v = \frac{0,838}{1 + pt + Dd} = \frac{0,838}{1,000244} = 837,795577 \text{ mil.}$$

46. Despues de haber dado estos principios para el arreglo de las medidas, veamos las fórmulas de Mr. de Salneuve. Supongamos primero que se use una regla f de hierro para medir una base B : esta regla se supone bien comparada con el metro patron. Si representa K el número de veces que cabe la regla en toda la base, será $B = Kf$; y siendo la temperatura del aire diferente en cada *estacion*, se podrá representar la de la primera por t , la de la segunda por t' t'' , t''' etc: y entonces

$$B = f_t + f_{t'} + f_{t''} + f_{t'''} \dots \text{etc.}$$

El número de términos del segundo miembro es K . El valor de la base B está espresado en funcion de tantas incógnitos como términos tiene: vamos á reducirlas á una sola, cuyo valor se determine despues.—Sea x la temperatura desconocida que debe haber para que la regla de hierro tenga exactamente la estension del metro legal, y h la dilatacion del hierro: en este caso como la regla con la temperatura t ha de tener un valor igual á la misma regla con la temperatura x mas una pequeña parte debida á la dilatacion producida por la temperatura $t-x$, esta se espresará por $h(t-x)$ pues que 1° : $h :: t-x: h(t-x)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} f_t &= f_x + h(t-x), \\ f_{t'} &= f_x + h(t'-x), \text{ etc.;} \end{aligned}$$

y la ecuacion primera $B = Kf$ se transforma en

$$\begin{aligned} B &= Kf_x + h(t-x) + h(t'-x) + h(t''-x) \dots \\ &= Kf_x + h(t+t'+t''\dots) - Khx, \end{aligned}$$

pues K espresa el número de términos: y poniendo por f_x el metro unidad,

$$B = K \text{ metros} + h(t+t'+t''\dots) - Khx.$$

Ahora para determinar la incógnita x recordaremos que la regla á x° es igual al metro á 0° ; y así, llamando M el patron

$$M_0 = f_x.$$

Pero si la regla de hierro se ha tomado igual al metro á 10° de temperatura, será

$$M_{10} = f_{10},$$

y á este grado se espresará la estension del metro por

$$M_0 + 10 p,$$

siendo p la dilatacion de la platina; y la de la regla por

$$f_x + h(10-x).$$

Siendo iguales estas dos últimas estensiones

$$M_0 + 10p = f_x + 10 h - hx,$$

ó solamente

$$10 p = 10 h - h x,$$

ya que $M_0 = f_x$: y despejando

$$x = \frac{10 (h - p)}{h}.$$

Luego sabiendo cuál es la temperatura x á la que seria la regla igual al patron del metro, con substituir su valor en la ecuacion de B se tendria la estension de la base medida con la correccion debida á la dilatacion de la regla. A la temperatura supuesta de 10° seria

$$x = \frac{10 (0,0000122 - 0,0000086)}{0,0000122} = 2^{\circ}, 95$$

poniendo por h , p las dilataciones del hierro y de la platina. (f).

47. El autor de estas fórmulas opina que las reglas de madera presentan suficiente exactitud para la ejecución de las operaciones relativas á la carta de un país ocupado ó conquistado. Esta proposicion parece dirigida á sostener que se deben preferir las reglas de metal en todas las operaciones que requieren la mayor exactitud, lo que aun no está demostrado. Hasta ahora parece que la madera no es dilatable por el calor á lo largo de sus fibras, y esta circunstancia con la del poco peso para dar á las reglas movimientos fáciles que abrevian las operaciones las hace preferibles de madera. La humedad si aumenta la longitud de dichas reglas, pues segun los esperimentos del general Roy, citado por Mr. Butler Williams, unas reglas de madera espuestas durante uno noche á la humedad aumentaron cerca de media pulgada en 300 piés. Para remediar este inconveniente se toma la precaucion de impregnarlas de aceite hirviendo hasta dejarlas en cuanto es posible empapadas, y de cubrirlas despues con una capa gruesa de barniz: con reglas dispuestas de este modo, se puede creer que una base resulte medida con la posible exactitud principalmente en las altas llanuras de México, en donde es muy grande la sequedad de la atmósfera. Mr. Francoeur se espresa en estos términos: „las reglas de madera son preferibles porque la dilatacion parece obrar transversalmente, y que el calor no las alarga.” Mr. Puissant dice: „las reglas que

(f). Mr de Salneuve establece despues otra fórmula para corregir una base medida con reglas de madera, cuya dilatacion, dice, es desconocida; pero no estando probado que dichas reglas se dilaten longitudinalmente por el calor, me ha parecido conveniente omitirla.

se emplean en la medicion de las bases son de metal ó de madera, y representan un múltiplo de la unidad de medida." Y mas adelante agrega: „En defecto de reglas de hierro sirven *con ventaja* las de madera de abeto empapadas de aceite hirviendo, y cubiertas de un barniz grueso; pues que por esta operacion quedan muy poco sensibles á las variaciones higrométricas." En México no parece conveniente hacer las reglas de madera de abeto (*hucyamel* ó *ayacahuile*), porque se sabe que en nuestros altos países está muy espuesta á resquebrarse y torcerse; mejor seria usar del cedro, ó del ciprés que llamamos comunmente sabino (*ahuchuele*). En Inglaterra se han usado reglas y tubos de vidrio; pero esta substancia tambien se dilata con el calor, aunque ménos que los metales.

48. De cualquiera materia que se hagan las reglas deben tener una estension proporcionada para que se puedan manejar con facilidad: cuatro reglas de cinco varas cada una, ó sea de cinco metros, formarian una medida que podria llamarse *estacion*, y trabajando con solas dos, *par*. Cada regla, si son de madera, debe tener en sus extremos casquillos de hierro dispuestos de modo que faciliten el buen contacto de unas con otras: un clavo de cabeza hemisférica puesto en un extremo en el centro de la base del paralelepípedo, y otro de cabeza plana en el extremo opuesto pueden ser bastantes al efecto; ó bien se truncan las aristas verticales hasta que los extremos terminen en líneas. Las reglas han de estar montadas sobre bastidores de maderos fuertes de figura romboidal cuyos ángulos agudos se colocan siempre en la direccion de la base, y dispuestas de modo que se los puedan dar grandes y pequeños movimientos en el plano vertical y pequeños en el horizontal, procurando asegurarlas para que no

se pandeen ó tuerzan. Por último diremos con Mr. Puisant, que el ingeniero inteligente sabrá suplir nuestras omisiones, modificar segun las circunstancias los medios de ejecucion y los procedimientos prácticos que indicamos, y dar á los varios instrumentos que se emplean en la medicion de las grandes bases todo el grado de perfeccion de que sean susceptibles.

49. Cuando las reglas no se ponen horizontalmente, sino que se ha medido su inclinacion, es menester reducirlas á la línea horizontal. Suponiendo r la longitud de la regla, i el ángulo de inclinacion, y x la proyeccion horizontal se tendrá siempre

$$x = r \cos. i.$$

Pero siendo i un ángulo muy pequeño cuyo coseno se confunde con el radio y cuyas variaciones son muy pequeñas; los logaritmos de este coseno y de otro poco mayor ó menor, tienen por lo comun iguales las seis primeras cifras de sus mantizas: por consiguiente, no se puede determinar x con suficiente exactitud por medio de esta ecuacion. Para introducir los senos, que no tienen aquel inconveniente, tomaremos la diferencia entre r y x

$$r - x = r - r \cos. i = r (1 - \cos. i) = 2r \sin^2 \frac{1}{2} i.$$

Esta fórmula es muy sencilla para calcularla con facilidad; pero se puede simplificar atendiendo á que la serie de $\cos. i$ es muy convergente, y que se pueden tomar sin error considerable los dos primeros términos, de modo que $\cos. i = 1 - \frac{i^2}{2} + \text{etc.}$ Así, pues, la ecuacion

$$r - x = r \not\times (1 - \cos. i) = (1 - 1 + \frac{i^2}{2}) r = \frac{r i^2}{2}.$$

En todas estas operaciones i espresa minutos, y su logaritmo seno es el de las partes del radio que le corresponden: si es $i = 20'$ serán las partes del radio 0,0058177, cuyo logaritmo es 7,7647513, que es el logaritmo seno $20'$.

50. Las partes del radio se espresan con una fraccion decimal compuesta de muchas cifras que hacen molesto el cálculo por logaritmos cuando se desca la mayor exactitud. Por esta razon, cuando se necesite el seno de un número de minutos ó de segundos, se pueden sumar el logaritmo del número y el de seno $1'$ ó seno $1''$: Por ejemplo

$$\log: \text{sen. } 20' = \log. 20 + \log. \text{sen. } 1',$$

$$\log. \text{sen. } 20'' = \log. 20 + \log. \text{sen. } 1'';$$

y para esto conviene saber de memoria el log. sen. $1' = 6,4637261$, y log. sen. $1'' = 4,6855749$. Y en tal modo de calcular los logaritmos no hay dificultad alguna; porque siendo los senos de $1'$ y de $1''$ sensiblemente iguales á sus arcos en partes del radio, se tiene en todo caso

$$\text{arco de } 1' \times a = \text{sen. } 1' \times a,$$

$$\text{arco de } 1'' \times a = \text{sen. } 1'' \times a,$$

siendo a un número de minutos ó segundos, y 1 el radio de las tablas: por consiguiente

$$\log. \text{sen. } a \text{ minutos} = \log. \text{sen. } 1' + \log. a,$$

$$\log. \text{sen. } a \text{ segundos} = \log. \text{sen. } 1'' + \log. a,$$

51. Retrocedamos ahora á considerar otra vez nuestra fórmula

$$r - x = \frac{r i^2}{2}$$

para reducir el ángulo á partes del radio: por lo que acabamos de decir, se pondrá por $i \text{ sen } 1'$, por $i^2 i^2 \text{ sen}^2 1'$; y entonces

$$r - x = \frac{r i^2}{2} \text{ sen}^2 1'.$$

Pero ya hemos dicho que se debe tomar la inclinacion de la regla á uno y otro lado del cero del nivel para obtener el doble del ángulo, y así con substituir en lugar de $i \frac{2i}{2}$

$$r - x = \frac{1}{8} r (2i)^2 \text{ sen}^2 1',$$

$$r - x = \frac{1}{8} \text{ sen}^2 1' \times r (2i)^2;$$

pero $\frac{1}{8} \text{ sen}^2 1'$ es una cantidad constante cuyo logaritmo = 2,0243622, y si adoptamos 5 varas para cada regla no habrá otra cantidad variable que $(2i)^2$. Supongamos que el nivel haya dado $2i = 12'$:

log. $\frac{1}{8} \text{ sen}^2 1'$	2,0243622
log. 5.....	0,6989700
log. $(12)^2$	2,1583625

$$r - x = 0,000076154, \text{ log}..... 4,8816947.$$

Luego la proyeccion horizontal habria sido en este caso de $5'' - 0,000076154 = 4'',9999923846$.

52. Con el ángulo de inclinacion de la regla es menester calcular tambien la diferencia de nivel entre sus dos extremos, para que la suma de todas las diferencias dé lo que un extremo de la base está mas alto que el otro

Llamando dn esta diferencia parcial, como es el seno de la inclinacion,

$$dn = r \text{ sen. } i = r i \text{ sen. } 1':$$

y en el caso del número precedente

log. 5 varas.....	0,6989700
log. sen. 1'.....	6,4637261
log. $(6 = \frac{1}{2} 2 i)$	0,7781512
Log. suma.....	<hr/> 7,9408473,

que corresponde á una diferencia de nivel $dn = 0^{\circ},9087266$ entre los dos extremos de la regla.

53. No permiten siempre las localidades de un pais medir una base en línea recta. Cuando esto suceda, y no convenga buscar otro terreno, se hacen las operaciones siguientes: se miden las dos líneas AC, CB (fig. 4), y el ángulo muy obtuso $C = 180^{\circ} - s$, siendo s un ángulo muy pequeño, y con estos datos se trata de conocer AB para que sirva de base á las operaciones geodésicas. Llamando a, b, c los lados opuestos á los ángulos de la misma denominacion, se tiene primero

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C,$$

ó considerando que el ángulo obtuso C tiene el mismo coseno que su suplemento s ,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos. s;$$

pero $\cos. s = 1 - \frac{s^2}{2}$ tomando solo dos términos de la serie, y así

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - abs^2 \\ &= (a + b)^2 - abs^2. \end{aligned}$$

multiplicando y dividiendo el segundo término del segundo miembro por $(a + b)^2$, y estrayendo,

$$c = (a + b) \left\{ 1 - \frac{a b s^2}{(a + b)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

substituyendo el número de minutos del arco por el ángulo s , (núm. 50),

$$c = (a + b) \left\{ 1 - \frac{a b s'^2 \text{sen}^2 1'}{(a + b)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

exaltando la potencia y tomando dos términos, haciendo la multiplicacion y sacando el factor comun abs^2 resulta finalmente

$$c = a + b - \frac{a b s^2 \text{sen}^2 1'}{2 (a + b)}.$$

En realidad es esférico el triángulo ABC, porque debiendo ser la base AB de 10 á 15 mil varas, y proporcionalmente los otros dos lados, no se podrian suponer líneas rectas sin faltar á la exactitud que requiere esta operacion. Por eso se resta del ángulo C el exceso esférico que le corresponde, y del cual trataremos adelante.

54. Pero si la base en lugar de AB ha de ser DE, la que se ha de calcular por medio de BCA (fig. 4), la operacion es muy sencilla: En B y en A se miden los ángulos EBC, DAC; y en C los agudos BCE, ACD, y el obtuso ECD. Con estos datos y los lados BC, CA se resuelven en el triángulo EBC el lado EC, y en ACD el CD; queda, pues, reducido el caso á calcular la base DE por la fórmula de Mr. Francoeur, que es la esplicada en

el número anterior. Las bases determinadas por estos arbitrios no deben servir para dar principio á una triangulacion, pues para esto se ha de elegir un terreno plano en cuanto es posible, y que permita medir una línea recta; solo en estrema necesidad podrá apoyarse sobre una de dichas bases una triangulacion al empezarla. Pero si despues de haber concluido una cadena se llega al último lado como AB, entonces se podrá medir del modo explicado para verificar las operaciones. Cuando por la resolucion del último triángulo resulte AB de una estension igual con muy corta diferencia á la que se determina por medio de la línea quebrada ACB se puede asegurar que no se han cometido errores durante las operaciones; y se puede repetir la triangulacion sirviéndose de esta base AB para terminar en la que sirvió de apoyo en el principio. Se echa de ver que para medir una base por medio de otra recta se ha de resolver el mismo caso que cuando ocurre medir una distancia inaccesible con tal de que resulten triángulos bien conformados para resolverlos como esféricos introduciendo el radio de la tierra, ó aplicando á los ángulos la correccion del exceso esférico. (g).

55. Como la tierra está por todas partes cubierta de montañas y atravesada de valles, se tiene la necesidad, como ya se ha dicho, de reducir todas las medidas al nivel del oceano; y lo primero es reducir la base. Que sea R el radio de la tierra C *a* supuesta esférica, (fig. 5), A *a* ó B *b* = *d* la altura de la base horizontal sobre el nivel del mar, B la base medida AMB, y *b* la base reducida

(g). Los que desearan adquirir una instruccion mas estensa en todo lo relativo á las bases, podrán leer los capítulos 8 y 9 de la Geodesia de Mr. Puissant.

$a m b$; será $R + d$ el radio del arco AMB . Ya que los arcos semejantes son como sus radios,

$$B : b :: R + d : R,$$

$$b = \frac{BR}{R + d};$$

y la diferencia entre ambas bases será

$$\begin{aligned} B - b &= B - \frac{BR}{R + d} = \frac{B(R + d) - BR}{R + d} \\ &= \frac{Bd}{R + d} = Bd(R + d)^{-1} \\ &= \frac{Bd}{R} - \frac{Bd^2}{R^2} + \frac{Bd^3}{R^3} \dots \end{aligned}$$

Para trabajar con toda exactitud se introducirá el valor de R en funcion de la latitud del lugar de la base, y del aplanamiento.

56. Para terminar lo que tenemos que decir acerca de las bases geodésicas conviene tener á la vista ejemplos de la exactitud con que deben medirse. De las operaciones ejecutadas para levantar la nueva carta de Francia toma Mr. de Salneuve los siguientes. En 1804 se midió la base de Ensisheim cerca de Colmar con tres de las cuatro reglas de platina que se habian construido para las operaciones de la medida de la meridiana, y se encontró de 19044,39 metros: la cuarta regla desde entonces se conserva en el Depósito de las Longitudes. Dicha base debia servir para formar la carta de la Suiza. Apoyándose sobre ella, y despues de haber calculado muchos triángulos se encontró el lado

Estrasburgo y señal de Donon, de....	43931 ^m , 62
El mismo lado calculado por la base de Melun, medida por Delambre.....	43930, 91
Diferencia.....	0 ^m , 71

La base de Plouescat á la orilla del mar, medida con las propias reglas de platina, es de 10526 ^m , 91; y calcula- da por una cadena de treinta y tres triángulos se en- contró <i>perfectamente igual</i> . La de Gourbera, en la que sir- vieron tambien las mencionadas reglas, es de... 12220 ^m , 031	
Calculada por los triángulos que la encadenan con la de Perpiñan.....	12220, 769
Diferencia.....	0 ^m , 738

DE LAS SEÑALES.

57. No se podrian medir los ángulos exactamente si no hubiera puntos visuales situados en las estaciones que se eligen al tiempo de hacer el reconocimiento de un pais con el objeto de cubrirlo con una red de triángulos. Estos puntos visuales se llaman tambien *señales*; las principales circunstancias que deben tener son: que haya en cada una un punto visible correspondiente al centro de la estacion, y que se pueda descubrir con el antejo del círculo ó del teodolito repetidores: que puesto en ellas el observador pueda colocar el instrumento en el propio punto visual, ó en otro que corresponda á la vertical del centro de la estacion. Ya veremos que cuando no se obtiene esta última circunstancia se reducen los ángulos medidos

al centro de dicha estacion. En las cimas de nuestras montañas, cuando no están cubiertas de árboles ó malezas, se descubren cruces de madera ó mojones de mampostería de las propiedades territoriales, que podrán servir para economizar el tiempo y los gastos necesarios en establecer señales. En otras cimas hay pequeñas pirámides de piedra formadas por los antiguos mexicanos, y que llaman comunmente *cuccillos*; las cuales se pueden aprovechar porque se miran de muy grandes distancias. El geógrafo tambien se puede servir de las torres de los templos, de los pequeños campanarios de las haciendas, ó de otros puntos notables en algunos edificios; así como tambien de aquellos árboles que suelen encontrarse en lo alto de los montes, y de los cuales se descubren los troneos. Las cúpulas tienen el inconveniente de que nunca puede el ingeniero colocarse en la vertical del centro de estacion.

58. Cuando no se encuentran estas diferentes señales se construyen espresamente para formar los triángulos de primer orden. Conos truncados de mampostería con la capacidad suficiente para dar sombra á los observadores, y que tengan en el centro de sus bases superiores levantado un poste en cada una que sirvan de puntos de mira, y sobre los cuales se coloquen los instrumentos; pirámides truncadas formadas con cuatro estacas plantadas en tierra, cubiertas con tablas en la parte superior, dejando libre la inferior para que el ingeniero descubra todo el horizonte: estas pirámides han de terminar en puntos de mira que pueden ser pequeñas pirámides inversas, ó tetraedros que descansen sobre postes de madera colocados en los ejes de las señales. Tambien se construyen algunas que se llevan de un punto á otro: tales serian, por ejemplo, astas, en cuyas partes superiores se pusieran cuadra-

dos de hoja de lata de una vara ó mas por lado, pintados de negro y blanco ó de rojo y blanco, ó bien agujerados en los centros, y que girasen horizontalmente para colocar la mira de frente al observador. Estas señales portátiles se aseguran contra la fuerza del viento por medio de tres puntales ó *esteos*; y cuando han servido conviene levantar un pequeño poste de cal y canto, ó plantar una estaca en el lugar que ha ocupado la señal para poder verificar la triangulación en cualquier tiempo. [Fig. 6].

59. En Inglaterra, según Mr. Puissant, y en la India se hicieron operaciones delicadas al fin del último siglo, trabajando de noche, y con señales luminosas; pero se echa de ver que cuando se usen instrumentos repetidores, es menester que estas señales produzcan luz de suficiente duración, como buenas lámparas con espejos parabólicos. Estas sirvieron á MM. Biot y Arago en España para prolongar la meridiana de Francia. [h]. El propio autor aconseja disponer tres reverberos en los ángulos de un pequeño triángulo equilátero montado sobre un eje que se mueva horizontalmente para dar al aparato las posiciones convenientes; y asegura que las observaciones de noche son en lo general mas *concordantes* que las que se hacen de día y durante la presencia del sol.

60. Al tiempo de hacer el reconocimiento de un país se debe calcular si las diferentes señales se proyectarán sobre el cielo ó sobre la tierra, para pintar las primeras de blanco y las segundas de negro: veamos de qué manera se hace este cálculo. Supongamos que un observador está en A, [fig. 7], y que tiene el punto B proyectado sobre el cielo, quiera saber si desde B se observará

(h). Mr. Buttler Williams en su Geodesia describe señales luminosas y de reflexión.

la señal A proyectada sobre el cielo ó sobre la tierra. Tomará las distancias zenitales ZAB, ZAC del punto B y del opuesto en la direccion BA: si la suma de estas distancias es mayor que dos ángulos rectos, el punto A se observará desde B proyectado sobre el cielo, y si dicha suma es menor que los 180° la proyeccion se hará sobre el suelo; y euando la suma sea de 180° con corta diferencia se puede creer que la refraccion haga parecer el punto A sobre el cielo.

61. En euanto á la altura de las señales, es menester darles la suficiente para que se distingan desde las mayores distancias, y para resolver este caso se apela á la experiencia. Delambre dice que una señal debe tener tal altura que desde la estacion mas lejana se vea bajo del ángulo de $31''$. Esto supuesto, sea s una señal, [fig. 8] d su distancia mayor á otra señal desde la cual se vea la primera en ángulo de $31''$; se tendrá

$$d : s :: 1 : \text{tang. } 31'' \text{ en partes del radio,}$$

$$s = 0,00015 d.$$

Y así, la altura de una señal debe ser de 15 cienmilésimas de la mayor distancia.

62. Para establecer las señales nunca se ha de perder de vista la buena conformacion de los triángulos, como se ha dicho al principio de este capítulo: y aunque los alumnos de Minería saben las inconveniencias que deben tener dichos triángulos, en obsequio de otros lectores las explicaremos siguiendo á Mr. Puissant. Llamando A, B, C los ángulos, a , b , c los lados de un triángulo, determinemos la relacion entre estas cantidades para que dicho triángulo resulte bien conformado. Se tiene

$$a. \text{ sen } B = b. \text{ sen } A;$$

y suponiendo que b sea la base bien medida, y constante, diferenciando,

$$a \cos B \, dB + d a \sin B = b \cos A \, dA.$$

Por la primera ecuacion

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A};$$

$$\text{y así substituyendo en } d a = \frac{b \cos A \, dA}{\sin B} - \frac{a \cos B \, dB}{\sin B}$$

en lugar de $\frac{b}{\sin B}$, resulta

$$d a = \frac{a \cos A \, dA}{\sin A} - \frac{a \cos B \, dB}{\sin B}$$

$$= a \cot. A \, dA - a \cot. B \, dB.$$

Aquí se han supuesto positivas las diferenciales dA , dB , y pueden espresar en general los errores cometidos al medir los ángulos A , B ya sea por defecto del instrumento ó de las observaciones. Suponiendo que estos errores sean iguales y ambos por exceso ó por defecto, el error consiguiente de a se espresará por

$$da = adA (\cot. A - \cot. B),$$

y será nulo cuando $B = A$, ó el mas pequeño cuando sea la menor la diferencia entre estos ángulos. Si se supone

que los errores dA , dB son iguales pero de contrarios signos, ó que uno sea por exceso y otro por defecto,

$$da = \pm adA (\cot. A + \cot. B).$$

Reflexionemos ahora que $\cot. A + \cot. B = \frac{\cos. A}{\sin A} + \frac{\cos. B}{\sin B} = \frac{\sin (A + B)}{\sin A \sin B}$; y que siendo $\sin A \sin B = \frac{1}{2} \cos (A - B) - \frac{1}{2} \cos (A + B)$,

$$\cot. A + \cot. B = \frac{\sin (A + B)}{\frac{1}{2} \cos (A - B) - \frac{1}{2} \cos (A + B)} = \frac{2 \sin (A + B)}{\cos (A - B) - \cos (A + B)}.$$

tambien es cierto que

$$\begin{aligned} 2 \sin (A + B) &= 2 \sin C, \\ - \cos (A + B) &= \cos C; \end{aligned}$$

por todo lo cual, sustituyendo en la última ecuacion de da resulta

$$da = \pm adA \times \frac{2 \sin C}{\cos (A - B) + \cos C}.$$

De aquí se deduce que el error da será el mas pequeño posible cuando $\cos (A - B) = 1$, ó cuando $A = B$. De las dos hipótesis resulta que la condicion mas ventajosa es que los dos lados buscados en un triángulo sean cada uno iguales á la base medida.—Es verdad que en la práctica es

imposible aplicar rigurosamente esta regla; pero formando triángulos cuyos lados sean poco diferentes unos de otros, los errores en las observaciones de los ángulos tendrán muy poca influencia sobre los lados calculados. En general, no se debe admitir ningun ángulo menor que un tercio de ángulo recto, á menos que las circunstancias de localidad no obliguen á separarse de este precepto. De este modo se obtiene tambien la ventaja de que un ángulo del tamaño indicado se observa mas fácilmente con el círculo repetidor que si fuera mas pequeño.—Si en la ecuacion $a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ se suponen variables a, b , resultará diferenciando

$$da = db \times \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B},$$

lo que manifiesta que el error de un lado buscado es igual al de la base multiplicado por la razon $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$, ó por una cantidad mayor que la unidad, porque suponiendo $B = \frac{\text{cuadrante}}{3}$, $A + C = \frac{5 \text{ cuadrantes}}{3}$; y por consiguiente $\frac{5 \text{ cuadrantes}}{6}$ será el valor medio de A ó de C . Esto suministra nueva recomendacion para que las bases se midan con la mayor escrupulosidad.

CAPÍTULO III.

De la observacion de los ángulos, su reduccion al plano horizontal y al centro de estacion y de señal.

63. Sabiendo usar los instrumentos de topografía para medir los ángulos, es fácil comprender la construcción del círculo repetidor. Supongamos que un círculo de metal con su limbo graduado de 0 á 360° esté montado sobre un pie de tal manera que pueda tener movimiento

horizontal, y otro para ponerlo en el plano de dos objetos cualesquiera: si á este círculo se le adapta sobre el limbo un anteojo que gire alrededor del centro solo ó con el círculo, y otro debajo sujeto á dos movimientos del mismo modo que el superior, se tendrá la forma de un círculo repetidor. El anteojo sobre el limbo lleva por lo comun dos nonius, uno hácia el objetivo, y el otro hácia el ocular para que leyendo los ángulos en los dos, y tomando el medio entre ellos queden corregidos los efectos de la excentricidad. Los mejores círculos repetidores tienen cuatro nonius en dos diámetros perpendiculares, que dan los ángulos con la aproximacion de 5": los franceses tienen por lo comun 43 centímetros de diametro, y los hay de 27 que proporcionan suficiente exactitud en las operaciones geodésicas. El círculo repetidor lleva dos niveles de aire, uno grande y fijo en el anteojo inferior, y otro pequeño en el eje para determinar la horizontalidad cuando el limbo del instrumento está en posicion vertical. Esta pequeña descripcion es bastante para que á la vista de uno de estos instrumentos con poco estudio se puedan conocer los usos de las diferentes piezas que lo componen: los que desearan leer una completa descripcion pueden ocurrir á la Geodésia de Mr. Puissant.

64. La construccion del círculo repetidor se funda en este principio: si sobre una circunferencia graduada se lleva un arco suyo cierto número de veces contando desde un punto cero hasta que su extremo toque sensiblemente una de las divisiones de la circunferencia, este arco pequeño será igual al arco total medido dividido por el número de veces que se ha repetido el dicho arco unidad sobre la circunferencia. Supongamos dividido el limbo de un círculo en 360° , y que un arco se haya llevado ocho

veces sobre él terminando en la division 25 despues de haber pasado el cero: el arco total medido será de $360 + 25 = 385^\circ$, el cual dividido por 8 da por cociente $48^\circ 7' 30''$, valor del arco repetido. Es claro que si al medir el arco total se ha cometido algun error este se reduce á $\frac{1}{8}$ en el caso propuesto; pero se puede disminuir cuanto se quiera multiplicando las repeticiones. Este instrumento fué inventado por Mayer y perfeccionado por Borda, quien le ha dado su nombre.

65. Para medir un ángulo con el círculo repetidor es menester asegurarse primero de que los ejes ópticos de los anteojos son paralelos al plano del instrumento, lo que se consigue poniendo vertical el limbo, y horizontal el círculo que lleva el instrumento en la parte inferior de la columna que sirve de pié: este círculo se llama azimutal, y se arregla por medio de los grandes tornillos sobre los cuales descansa, y por un pequeño nivel de aire. En esta posicion se dirige el anteojo superior sobre un objeto lejano, y dando despues al limbo una media vuelta, ó haciendo girar 180° se vuelve á dirigir el anteojo sobre el mismo objeto: si entónces coincide la interseccion de los hilos de la retícula del propio modo que en la primera observacion, será prueba de que el eje óptico es paralelo al plano del círculo; pero si el objeto se ve á la derecha ó á la izquierda de la interseccion, se corrige la mitad del error moviendo la retícula por medio de los tornillos que se manifiestan fuera del tubo del anteojo. Se repite esta operacion hasta que el objeto se mire en ambas posiciones del instrumento coincidir con el punto central de la retícula. Arreglado que sea el anteojo superior por él se arreglará el inferior, pues dirigidos los dos á un propio objeto deben coincidir las dos visuales.

66. Este método de ajustar los anteojos seria muy exacto si el círculo no tuviera algunas pequeñas imperfecciones inevitables de construccion. Para que no haya duda se usa el *anteojo regulador* ó de pruebas (fig. 8), el cual tiene hácia sus dos extremos dos cuadrados perfectos de metal perpendiculares al eje, de modo que puesto el anteojo sobre una superficie descansando sobre cualesquiera lados de los cuadrados, el eje óptico sea siempre paralelo á dicha superficie. Suponiendo que los hilos de este anteojo estén bien arreglados de antemano, póngase sobre el limbo del círculo repetidor cuando este tenga posicion horizontal, y dirigiendo la visual á un mismo objeto bien distante con el anteojo superior y con el de pruebas, las dos visuales deben herir un mismo punto del objeto si el anteojo del círculo tiene su eje paralelo al plano; y si nó, se moverá su retícula hasta conseguir la coincidencia de ambas visuales.

67. Al tomar un ángulo con el círculo repetidor se coloca el limbo poco mas ó menos en el plano de los objetos, dándole movimiento alrededor de los ejes vertical y horizontal, y acaba de ajustarse el plano por medio de las roseas tangenciales. Entonces fijando el instrumento en esta posicion un observador pone en cero el nonius del anteojo superior, y mueve el limbo hasta que dicho anteojo alcance uno de los objetos, cuya coincidencia ajusta por la rosca tangencial; y otro dirige el anteojo inferior por su movimiento propio sobre el otro objeto en la interseccion de los hilos: el ángulo que forman estas dos visuales es el que se desea conocer. Pero un solo observador puede hacer las dos operaciones.

68. Supogamos que se trate de medir el ángulo DCY (fig. 9), que forman en el centro de instrumento dos obje-

tos cualesquiera D, Y. El anteojo superior OA está en cero y dirigido por el movimiento del limbo al punto D de la derecha, si la graduacion se cuenta de derecha á izquierda. Se dirige despues el anteojo inferior O'B sobre el otro punto Y: esto seria bastante para obtener el ángulo DCY si en la parte inferior del limbo hubiera graduacion, y su anteojo llevara nonius; pero no es así. Ahora, fijos los dos anteojos al limbo muévase éste hasta que el inferior O'B descubre el objeto D: entonces el OA se pondrá en O'A', y el ángulo $BCA = ACA'$, y $BCA' = 2 YCD$. Dése al anteojo O'A' su movimiento propio y llévase de O'A' á O'B desde cero hasta un número de grados y minutos en B que será el doble del ángulo YCD, ó $YCD = \frac{BCA'}{2}$. Cada par de observaciones hechas para

obtener el doble de un ángulo se llama *observacion conjugada*. Estando firmes los anteojos hágase girar el limbo hasta que el índice B quede en A; el cero que estaba en A' se pondrá en A'', y llevando otra vez el anteojo superior al objeto Y el índice mareará el ángulo BCA'' triple de YCD = $\frac{BCA''}{3}$. Repitiendo estas operaciones se ten-

drá un arco múltiplo del buscado, el cual es siempre igual á la indicacion del nonius dividida por el número de observaciones.

69. Tambien se repiten los ángulos procediendo por observaciones conjugadas. En la primera que dió el duplo del ángulo quedó el anteojo superior en B, y el cero en A'. Moviendo ahora el limbo para que el punto B se ponga en A retrocederá el cero hasta A'', y llevando el anteojo inferior al objeto Y, se tendrá una observacion simple: muévase otra vez el limbo para que el anteojo in-

ferior descubra el objeto D, el cero se pondrá en A''' , y no faltará para concluir la operacion mas que poner el anteojo superior en la direccion Y; el índice señalará entonces un ángulo BCA''' cuádruplo de YCD. Así, por 1, 2, 3, 4 observaciones conjugadas se obtiene el doble, el cuádruplo, el séstuplo, y el óctuplo del ángulo que forman dos objetos.

70. Muchas veces se toman ángulos de elevacion ó depresion con el círculo repetidor, lo que se hace midiendo las distancias zenitales, que son los complementos. Es claro que para hacer estas observaciones es indispensable poner el limbo vertical; y esto se consigue nivelando primero el círculo azimutal, sirviéndose al efecto de los grandes tornillos de los tres piés del instrumento, como ya se ha dicho, para que la columna sostenedora del círculo repetidor se ponga vertical. Si esta condicion se ha cumplido, y el limbo se ha puesto con el anteojo superior en cero dirigido á un objeto, y en el plano vertical determinado por una plomada, ó por un nivel sujeto al eje central, haciéndolo girar 180° sobre la línea vertical de su centro, de modo que el objetivo del anteojo venga hácia el observador, el limbo conservará su verticalidad poco mas ó menos. Los 180° de la media vuelta se miden por el círculo azimutal, y cualquier pequeño desarreglo en la verticalidad del limbo se corrige por el nivel.

71. Que sea S (fig. 10) un objeto cuya distancia zenital se trata de observar. Se fijará en cero el anteojo índice, y moviendo el limbo se pondrá en el plano vertical del objeto, el que debè coincidir con el centro de la retícula del anteojo representado por OA ó por CA. En esta disposicion ZCA será la distancia zenital del punto S, que supondremos una señal, ó será el complemento de

su altura sobre el horizonte, ó bien el suplemento del ángulo ACP determinado por la plomada P, el cual se leería con mucha inexactitud. Veamos cómo se escusa la plomada.

72. Habiendo dispuesto el círculo como queda explicado se mueve el limbo alrededor de la vertical del centro hasta completar una semicircunferencia, dejándolo en el propio plano vertical de la señal. En esta situación siempre pasa por Z la vertical, y el objetivo del anteojo está hacia el observador, el cero estará en A (fig. 11), y el ángulo ACA' será doble de la distancia zenital. Para medir este doble ángulo se deja firme el limbo, y se lleva el anteojo á descubrir la señal S; entonces el nonius dará el arco comprendido entre A y A' ó el ángulo duplo ACA' de la distancia zenital. Esta operación tendría toda exactitud si al voltear el limbo para pasar de la primera observación á la segunda girase perfectamente alrededor de la vertical conservando cada uno de sus puntos la misma altura sobre el horizonte; y esto casi nunca sucede. Así, pues, en cada observación es menester arreglar la verticalidad, como ya se dijo, por medio del nivel.

73. Una vez conocido el doble de la distancia zenital, es fácil obtener el cuádruplo. Fijando el anteojo en la posición de la figura 11, vuélvase el instrumento á la que tenía en la figura 10; el anteojo quedará en la dirección CA' (fig. 12), y el cero en A. Si se mueve el limbo en el plano vertical hasta descubrir el punto S con el anteojo, el cero bajará hasta A (fig. 13), y solo faltará que llevar el nonius de A' á A'' para leer el cuádruplo de la distancia. Continuando de este modo las observaciones se puede hacer que el anteojo recorra muchas circunferencias, cuyo número se conocerá fácilmente habiendo ano-

tado la primera distancia; porque la totalidad de los grados recorridos debe ser un número, que, dividido por el de observaciones ha de dar por cociente la distancia con muy corta diferencia. Sea x el número de circunferencias, n el de observaciones, g la graduacion que da el nonius al fin y d la distancia; siempre se tendrá

$$\frac{x + g}{n} = d,$$

$$x = d \times n - g.$$

74. Para dar un perfecto conocimiento de las ventajas que resultan de la multiplicacion ó repeticion de los ángulos, transcribiremos lo que dice Mr. Biot en su astronomía física.

“No habria ventaja alguna en la multiplicacion si las divisiones del círculo fueran exactas matemáticamente, y si el observador dirigiera sus visuales con toda perfeccion; porque entonces una sola observacion daria exactamente el ángulo. Pero siendo imposible que en la práctica se cumplan estas condiciones, las suple la repeticion por compensaciones.—Respecto al error de las divisiones se ve que los arcos medidos se siguen sin interrupcion sobre el limbo, de modo que el punto final de una observacion es el origen de la siguiente. Esto hace que la suma de las observaciones, ó el arco total recorrido, no contenga absolutamente error alguno intermedio, sino solo los dos errores extremos, los cuales quedan disminuidos por sí mismos; pues las alidadas del círculo llevan cuatro nonius que se leen por separado, y cuyo término medio contribuye á señalar el principio y el fin del arco total con mayor probabilidad de exactitud. Finalmente, el pequeño error,

que aun puede quedar á pesar de estas precauciones en las lecturas extremas, hallándose repartido por la division en todo el arco recorrido apenas conserva una influencia sensible sobre el arco de una sola observacion. Así, los errores de la graduacion se disminuyen repitiendo los ángulos, y la compensacion que se hace no es efecto de una probabilidad sino de una certidumbre.—Para conocer hasta dónde puede llegar esta compensacion, dirémos que en nuestros círculos (*los franceses*), que no tienen por lo comun mas que cuatro decímetros, ó cosa de quince pulgadas de diámetro, ciertamente no puede llegar el error de graduacion á 15" sexagesimales; y si este error se reduciria á $\frac{1}{2}$ " despues de treinta observaciones, qué quedaria de él al cabo de ochenta ó ciento? Cuánto disminuiria si, como se puede hacer y se ha hecho, se dejan las series de diferentes dias sucederse sin interrupcion sobre el limbo, de modo que los errores de las dos lecturas extremas se encuentren repartidos sobre un arco total muchos miles de veces mayor que el arco sencillo?"

75. Si en el círculo repetidor hubiera solo un nonius ningun error respecto al punto de partida habria que llevar en cuenta para medir los ángulos, pues que siempre se pone en cero la línea de fé al empezar las observaciones; pero habiendo en los mejores instrumentos cuatro, y siendo muy difieil que los tres señalen un número entero perfectamente sobre el limbo cuando el del anteojo se fija en cero, debe haber un error no despreciable. Supongamos que al empezar una observacion señale el primer nonius cero, que al segundo le falten 10" para llegar á 90°, al tercero le sobren 20" de los 180°, y al cuarto tambien le sobren 30", se tendrán los errores

Del primer nonius.....	00"
Del segundo.....	— 10
De tercero.....	+ 20
Del cuarto.....	+ 30
<hr/>	
Suma dividida por 4.....	+ 10"

Quiere decir que el punto de partida para tomar los ángulos debe estar á + 10" del cero del limbo, y por consiguiente que del arco total se han de restar estos 10" antes de dividirlo por el número de observaciones.

76. Como este tratado se escribe principalmente para los alumnos del colegio de Minería, quienes estudian en el segundo curso de matemáticas la topografía, no daremos la descripción del teodolito, por ser instrumento que ya conocen, así como el modo de repetir con él los ángulos. Solo haremos notar que un buen teodolito repetidor es de preferir al círculo para las observaciones terrestres, porque los ángulos que con él se miden son tomados en el círculo azimutal, y no hay por consiguiente necesidad de reducirlos al plano horizontal. Esperemos ver cumplidos los deseos de Mr. Puissant de que se construyan círculos repetidores con anteojos móviles en planos perpendiculares al limbo, de modo que los ángulos repetidos queden, como los que dan los teodolitos, reducidos al horizonte. Tampoco hablaremos del círculo vertical de la construcción de Ertel, porque sabiendo el uso del repetidor de Borda, fácilmente se usará aquel, pues el fundamento de la repetición de los ángulos es el mismo en uno y otro.

77. Supongamos que con el instrumento descrito se haya observado el ángulo BCA inclinado al horizonte, que

forman las dos señales A, B, (fig. 14); la proyeccion horizontal de este ángulo está representada en A'CB'. Se puede figurar un triángulo esférico formado por las distancias zenitales $az = d$, $bz = d'$ de las dos señales, y por $ab = c$ que es la medida del ángulo observado ACB: el ángulo z es igual á la proyeccion horizontal A'CB' que buscamos. Siendo s la suma de los lados del triángulo esférico se tendrá

$$\text{sen } \frac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\text{sen } (\frac{s}{2} - d) \text{ sen } (\frac{s}{2} - d')}{\text{sen } d \text{ sen } d'}}$$

Esto es bien sabido; pero se ha de notar que el ángulo z podria calcularse bien si las distancias zenitales no se acercaran á 90° , lo que sucede pocas veces en la práctica. Lo mas comun es que dichas distancias sean 2 ó 3 grados menores que el cuadrante, y entonces sus senos se acercan al valor del radio, resultando de aqui que la proyeccion horizontal no se puede calcular por esta fórmula con toda la exactitud que debe desearse. Nos hallamos, pues, en el caso de resolver un triángulo cuando dos de sus lados son poco diferentes de un cuadrante.

78. Si al triángulo esférico zab aplicamos la ecuacion fundamental para resolver los triángulos oblicuángulos.

$$\cos c = \cos d \cos d' + \text{sen } d \text{ sen } d' \cos z,$$

$$\cos z = \cos C = \frac{\cos c - \cos d \cos d'}{\text{sen } d \text{ sen } d'};$$

y llamando δ , δ' los complementos de d , d'

$$\cos C = \frac{\cos c - \text{sen } \delta \text{ sen } \delta'}{\cos \delta \cos \delta'} :$$

como los complementos de las distancias se suponen muy pequeños se puede poner en lugar del producto $\sin \delta \sin \delta'$ el de los arcos $\delta \delta'$ con lo cual, y sustituyendo $1 - \frac{\delta^2}{2}$, $1 - \frac{\delta'^2}{2}$ por los cosenos del denominador,

$$\cos C = \frac{\cos c - \delta \delta'}{1 - \frac{1}{2}(\delta^2 + \delta'^2)}.$$

Pasando arriba el denominador, formando la potencia hasta el segundo término, y despreciando los superiores al cuadrado,

$$\cos C = \cos c - \delta \delta' + \frac{1}{2}(\delta^2 + \delta'^2) \cos c.$$

Esta fórmula basta para conocer la proyeccion horizontal, pero se prefiere calcular la diferencia x entre el ángulo observado y su proyeccion: en este caso

$$C = c + x,$$

$$\cos C = \cos (c + x) = \cos c - x \sin c;$$

porque $\cos x = 1$, y $\sin x = x$, ya que la diferencia entre estos ángulos debe ser muy pequeña en todos los casos que pueden ocurrir en la práctica. Pongamos ahora por $\cos C$ su equivalente hallado, y se tendrá la ecuacion

$$\cos c - \delta \delta' + \frac{1}{2}(\delta^2 + \delta'^2) \cos c = \cos c - x \sin c,$$

y de aquí despejando

$$x = \frac{\delta \delta' - \frac{1}{2}(\delta^2 + \delta'^2) \cos c}{\sin c}.$$

79. Para reducir esta fórmula á la de Legendre consideremos que $\cos \frac{c}{2} = \cos^2 \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2} c$, y que $\delta \delta' = \delta \delta' (\sin^2 \frac{1}{2} c + \cos^2 \frac{1}{2} c)$. Sustituyendo estos valores en la última ecuacion se transforma en

$$x = \frac{\delta \delta' (\sin^2 \frac{1}{2} c + \cos^2 \frac{1}{2} c) - \frac{1}{2} (\delta^2 + \delta'^2) (\cos^2 \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2} c)}{\sin c}$$

haciendo las multiplicaciones, sacando los factores $\sin^2 \frac{1}{2} c$, $\cos^2 \frac{1}{2} c$, y poniendo $4 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$ por $2 \sin c$, resulta

$$\begin{aligned} x &= \frac{(\delta + \delta')^2 \sin^2 \frac{1}{2} c - (\delta - \delta')^2 \cos^2 \frac{1}{2} c}{4 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \left(\frac{\delta + \delta'}{2} \right)^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} c - \left(\frac{\delta - \delta'}{2} \right)^2 \cot \frac{1}{2} c \end{aligned}$$

Los pequeños arcos δ y δ' se reducen á segundos en la práctica por lo que dejamos dicho, y entonces se multiplican los dos términos de la fórmula por $\sin 1''$; de suerte que

$$x = \left(\frac{\delta + \delta'}{2} \right)^2 \sin 1'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} c - \left(\frac{\delta - \delta'}{2} \right)^2 \sin 1'' \cot \frac{1}{2} c.$$

Esta es la fórmula de Legendre, sencilla, y que se reduce á tabla de los diferentes valores de x para la multitud de reducciones que se ofrecen cuando se observan los ángulos con el repetidor de Borda.

80. Daremos un ejemplo de la reduccion de los ángulos al plano horizontal, para que sirva de ejercicio á los estudiantes. La cumbre del cerro de Axusco y la ige-

sia del pueblo de Chimalpa hacen con el observatorio del colegio de Minería un ángulo inclinado de $65^{\circ}18'14'' = c$: la distancia zenital del primer punto es de $86^{\circ}25'$, y su complemento $\delta = 3^{\circ}34'$; y la del segundo $88^{\circ}10'$, cuyo complemento $\delta' = 1^{\circ}50'$. Calculemos con estos datos la diferencia x entre el ángulo observado y su proyeccion horizontal.

$$\frac{\delta' + \delta}{2} = 2^{\circ}42' = 9720'',$$

$$\frac{\delta - \delta'}{2} = 52' = 3120'';$$

$$2 \log. 9720'' \dots\dots\dots 7, 9753326$$

$$\log. \text{sen } 1'' \dots\dots\dots 4, 6855749$$

$$\log. \text{tang } \frac{1}{2} c \dots\dots\dots 9, 8067860$$

$$293'', 56 \dots\dots\dots \log \dots\dots\dots 2, 4676935$$

$$2 \log. 3120'' \dots\dots\dots 6, 9883092$$

$$\log. \text{sen } 1'' \dots\dots\dots 4, 6855749$$

$$\log. \text{cot } \frac{1}{2} c \dots\dots\dots 0, 1932140$$

$$73'', 637 \dots\dots\dots \log \dots\dots\dots 1, 8670981$$

$$x = 293, 560 - 73, 637 = 219'', 923 = 3^{\circ}39'', 9,$$

$$C = c + x = 65^{\circ}18'40'' + 3^{\circ}39'', 9 = 65^{\circ}22'19'', 9,$$

que es valor del ángulo reducido al horizonte.

81. Se sabe que cuando un observador no puede colocarse en el centro de una estacion, tampoco puede medir el ángulo que con ella forman otros dos objetos si no es aproximativamente, situandose en un punto inmediato cuya distancia al centro debe determinar; y que entonces al ángulo observado le aplica una correccion para reducirlo al que observaria desde dicho centro inaccesible. Esto es reducir los ángulos al centro de estacion.

82. Supongamos un triángulo TCS (fig. 15), formado por tres señales, y que se quiera conocer el ángulo en C cuando no se puede llegar á este punto. Ymaginemos una circunferencia que pase por los tres vértices T, C S' y la sola inspeccion de la figura nos hará conocer que un observador puesto en un punto cualquiera de esta circunferencia, como en O, mediria un ángulo TOS = TCS: por consiguiente no habria en tal caso necesidad de reduccion alguna. Prescindiendo ahora de la circunferencia supongamos que el ingeniero se coloque en otro punto O á la derecha del centro C, y que habiendo observado el ángulo TOS = O quiera reducirlo á que sea igual con TCS = C. Si el instrumento que usa está graduado de izquierda á derecha llamará siempre *i* el *ángulo de direccion* que forman el centro C y la estacion de la izquierda, ó si la graduacion va de derecha á izquierda, aplicará la letra al que forman el centro y la señal de la derecha. Sean CS = D, CT = Y, CO = *r*. En el triángulo ODS es esterno el ángulo SDT, y así

$$SDT = O + S,$$

y por la misma razon en TDC

$$SDT = C + T;$$

$$C + T = O + S,$$

$$C = O + S - T.$$

En el triángulo TCO se tiene

$$CT : \text{sen } TOC :: CO : \text{sen } T,$$

$$Y : \text{sen } i :: r : \text{sen } T = \frac{r \text{ sen } i}{Y};$$

y en SCO

$$SC : \text{sen SOC} :: CO : \text{sen S},$$

$$D : \text{sen } (O + i) :: r : \text{sen S} = \frac{r \text{ sen } (O + i)}{D};$$

Ya que los ángulos T, S han de ser siempre muy pequeños, se pueden tomar sus arcos reducidos á segundos en lugar de sus senos, con lo que

$$T \text{ sen } l'' = \frac{r \text{ sen } i}{Y}, T = \frac{r \text{ sen } i}{Y \text{ sen } l''},$$

$$S \text{ sen } l'' = \frac{r \text{ sen } (O + i)}{D}, S = \frac{r \text{ sen } (O + i)}{D \text{ sen } l''}$$

y substituyendo estos valores de T y S en la ecuacion de C,

$$C = O + \frac{r \text{ sen } (O + i)}{D \text{ sen } l''} - \frac{r \text{ sen } i}{Y \text{ sen } l''},$$

y la diferencia

$$C - O = \frac{r \text{ sen } (O + i)}{D \text{ sen } l''} - \frac{r \text{ sen } i}{Y \text{ sen } l''}.$$

Esta es la correccion que debe aplicarse al ángulo observado para reducirlo al centro. Cuando una de las distancias es estremamente grande respecto á r la fórmula tiene un solo término; esto es, siendo D infinita

$$C - O = - \frac{r \text{ sen } i}{Y \text{ sen } l''}:$$

y si ambas distancias son infinitas como cuando se observan los astros, el ángulo observado es el mismo del cen-

tro, porque $C - O = 0$, $C = O$. Delambre demuestra que tambien se obtiene este resultado colocándose el observador en un punto de la tangente al círculo que pasa por las tres señales; pero en este caso se necesita conocer uno de los ángulos, S , para determinar la direccion de la tangente, ya que $CSO = OCN$.

83. La ecuacion hallada para $C - O$ tiene el inconveniente de constar de dos términos y de ser complicada para el cálculo por logaritmos; y así, la haremos mas sencilla poniendola primero en esta forma

$$C - O = \frac{Y r \operatorname{sen} (O + i) - D r \operatorname{sen} i}{D Y};$$

y en el triángulo TCS, en donde cada ángulo es suplemento de los otros dos, se tiene

$$CT = Y : CS = D :: \operatorname{sen} S : \operatorname{sen} T = \operatorname{sen} (S + C),$$

$$Y = \frac{D \operatorname{sen} S}{\operatorname{sen} (S + C)}.$$

Pero aquí es desconocido el ángulo C ; lo supondremos igual con O , de lo cual no resulta ningun inconveniente, puesto que la diferencia entre ambos ha de ser siempre muy pequeña: entonces substituyendo por Y su valor $\frac{D \operatorname{sen} S}{\operatorname{sen} (S + O)}$, tendremos

$$C - O = \frac{r \operatorname{sen} S \operatorname{sen} (O + i) - r \operatorname{sen} i \operatorname{sen} (S + O)}{D \operatorname{sen} S}$$

Substituyendo los valores de los senos de $O + i$, $S + O$, multiplicando y reduciendo,

$$C - O = \frac{r \operatorname{sen} O \operatorname{sen} (S - i)}{D \operatorname{sen} S},$$

$$(C - O)'' = \frac{r \operatorname{sen} O \operatorname{sen} (S - i)}{D \operatorname{sen} S \operatorname{sen} l''}.$$

Aunque esta fórmula no da la corrección con toda la exactitud que la primera por la suposición de $C = O$, proporciona la suficiente en la práctica, y tiene la ventaja de la sencillez. Cuando el observador está colocado de modo que tenga el centro á la izquierda de los dos objetos S , T , como en O el ángulo i permanece con el signo que lleva: si está en O' en la dirección del objeto de la izquierda $i = 0$, y la fórmula será $\frac{r \operatorname{sen} O \operatorname{sen} S}{D \operatorname{sen} S \operatorname{sen} l''}$; y si el

lugar del observador está en O'' de tal modo que dirigiendo su visual al centro C tenga la una señal S á la derecha y la otra T á la izquierda, i tendrá signo contrario, y en la fórmula será $S + i$ en lugar de $S - i$. La exactitud del cálculo depende mas bien de r que de i , y así es menester que esta distancia se mida con toda escrupulosidad.

84. Hasta aquí hemos supuesto que el centro de la estación es visible para poder observar el ángulo de dirección i , y además que se puede medir la distancia r . Si la señal es un objeto cilíndrico, y cuyo centro C es invisible é inaccesible se coloca el observador en un punto O , (fig. 16), desde el cual toma las distancias Ob , Oa iguales sobre las tangentes en M , M' ; la línea $O m$ que va por el medio de $a b$ pasa por el centro. La relación entre la secante y la tangente del círculo da

$$Of = \frac{\overline{MO}^2}{Od},$$

y entonces

$$OC = r = \frac{Od + Of}{2}.$$

En cuanto al ángulo de direccion COT se puede tomar directamente puesto que se conoce la direccion Od , ó midiendo cada uno de los ángulos TOM, TOM'; su semisuma COT = i .

85. En el caso de que sea el objeto un prisma de base cuadrada como son por lo comun los campanarios de los templos, lo mas sencillo es que el observador tome posicion en una perpendicular al medio del lado del cuadrado; porque esta perpendicular es la direccion del centro: y la distancia r se tendrá midiendo la parte esterna de la línea, y agregándole la mitad del lado del cuadrado. Pero si esto no pudiere ser medirá las lineas OM, OM' (fig. 17), á dos esquinas, y las partes Oa, Ob proporcionales; la Od, que vaya por el medio de ab , mareará en d la direccion del centro. Tambien

$$\begin{aligned} Ob : bM :: Om : mC, \\ Cd = mC - md, \\ OC = r = Od + Cd. \end{aligned}$$

Operaciones semejantes se hacen cuando los objetos son de bases poligonales, ó de paralelógramos rectángulos como las ermitas ó capillas que hay en las cimas de muchas de nuestras montañas.

86. Algunas veces sucede que desde una estacion no se puede observar el centro de la señal de otra estacion, bien porque una cara de esta cuando es rectangular no se presenta perpendicularmente al observador, ó porque no está iluminado el punto de la direccion central: entonces hay que reducir el ángulo observado al centro de la señal observada, aplicando al primero una correccion que se llama de *fase de la señal*. Supongamos que la cara $a b$, (fig. 18), de una señal sea la que se presente alumbrada al observador en O, el que dirigiendo su visual al medio A de la proyeccion de dicha cara, no habrá medido el ángulo TOC sino TOA; el pequeño ángulo AOC es el error de la fase $a b$: veamos cómo se determina. Llamando d la distancia OC, d' la distancia OA y δ la AC, se tendrá en el triángulo AOC

$$\text{sen } \angle AOC = \text{sen } O = \frac{\delta \text{ sen } C}{d'};$$

y como A es suplemento de $C + O$

$$d' = \frac{d \text{ sen } C}{\text{sen } (C + O)} = \frac{d \text{ sen } C}{\text{sen } C \cos O + \text{sen } O \cos C},$$

y substituyendo este valor en la primera ecuacion,

$$\text{sen } O = \frac{\delta}{d} \text{ sen } C \cos O + \frac{\delta}{d} \text{ sen } O \cos C:$$

dividiendo los dos miembros por $\cos O$, é introduciendo la tangente

$$\text{tang. } O = \frac{\delta}{d} \text{ sen } C + \frac{\delta}{d} \text{ tang } O \cos C,$$

$$\text{tang } O = \frac{\frac{\delta}{d} \text{ sen } C}{1 - \frac{\delta}{d} \cos C}$$

y multiplicando el numerador por la potencia — 1 del denominador, tomando solo dos términos,

$$\text{tang } O = \frac{\delta}{d} \text{ sen } C + \left(\frac{\delta}{d} \right)^2 \text{ sen } C \cos C.$$

Basta calcular el primer término de esta fórmula, que da la exactitud suficiente; y para mayor comodidad se reduce á segundos tomando el arco por la tangente, con lo que

$$O'' = \frac{\delta}{d} \times \frac{\text{sen } C}{\text{sen } 1''}.$$

87. Tanto en esta fórmula como en las anteriores para reducir el ángulo observado, que tambien se llama *ángulo de posicion*, al del centro se han de calcular de antemano las distancias por una resolucion aproximativa de los triángulos de la red; y esta última del error de fase es menester haber conocido la distancia δ del punto visual al centro de la señal observada, y el ángulo C por la dicha resolucion. Cuando la señal observada es cilíndrica el cálculo del error de fase no es tan sencillo, y puede verse en la Geodesia de Mr. Puissant. Casi siempre se pueden evitar estos errores proporcionando las señales al buen alcance de los anteojos. Los campanarios de las iglesias no producen error porque rematan comunmente en cruces, ó en agujas de hierro con veletas; los mojones, si son grandes terminan en cruces; y á las ermitas se pueden poner objetos visuales que correspondan al centro de estación.

CAPÍTULO IV.

Resolucion de los triángulos.

88. Una vez hechas todas las correcciones que se han esplicado á los ángulos observados parece que habriamos llegado al caso de proceder á la resolucion de los triángulos formados en la superficie horizontal de la tierra; pero aun hay que vencer una dificultad. Los lados de los triángulos se espresan en medidas lineales, siendo ellos arcos de círculos máximos; y ademas, si se resolvieran

como esféricos habria que introducir en los cálculos el radio de la tierra, y las operaciones serian muy laboriosas. Pero se pueden resolver dichos triángulos reduciéndolos primero á los que forman las respectivas cuerdas de los arcos. Veamos como se hace esta reduccion.

89. Sea el arco $GH = \phi$, (fig. 19), su cuerda $= K$, el radio del círculo correspondiente al arco, que aquí es $i G = R$: tomando otro radio $i L$ que represente la unidad, llamando el arco $LO = a$ y su cuerda $= a$, se tiene

$$a = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a,$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2^3 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^5}{2^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots,$$

tomando tres términos de la serie del seno; luego

$$a = a - \frac{a^3}{24} + \frac{a^5}{1920} \dots (1)$$

En los triángulos ILO , IGH

$$\begin{aligned} IL : LO &:: IG : GH, \\ 1 : a &:: R : K; \end{aligned}$$

y pues los arcos semejantes son proporcionales á sus radios,

$$1 : a :: R : \phi.$$

De la primera proporcion se deduce $a = \frac{K}{R}$, y de la segunda $a = \frac{\phi}{R}$. Substituyendo estos valores en la ecuacion (1) resulta

$$\frac{K}{R} = \frac{\varphi}{R} - \frac{\varphi^3}{24 R^3} + \frac{\varphi^5}{1920 R^5},$$

$$K = \varphi - \frac{\varphi^3}{24 R^2} + \frac{\varphi^5}{1920 R^4}.$$

Este es el valor de la cuerda, y el exceso que le lleva el arco,

$$\varphi - K = \frac{\varphi^3}{24 R^2},$$

no apreciando el término en φ^5 ; pues ya que el radio R de la tierra es muy grande respecto al arco, que es lado de un triángulo, resulta despreciable el valor del quebrado $\frac{\varphi^5}{1920 R^4}$. Así, para convertir un arco en su cuerda se le

restará $\frac{1}{24 R^2} \times \varphi^3$, siendo el coeficiente $\frac{1}{24 R^2}$ cons-

tante para un mismo país. Si es, por ejemplo, el grado medio del meridiano á 45° de latitud de 111134 metros, multiplicado por 360 dará la circunferencia, y se deducirá el radio $R = 6.367.524$ metros: con este número quedará determinado el coeficiente, y despues su logaritmo $= 5.0118476$.

90. No basta reducir los lados esféricos de los triángulos á sus cuerdas, como acaba de verse; es necesario conocer tambien el *exceso esférico*, esto es, la cantidad que un ángulo medido en la superficie de la tierra es mayor que el rectilineo formado por las cuerdas de los lados. Sea C (fig. 20), el centro de la tierra, y AOB un triángulo formado en su superficie: en la pirámide $AOBC$ el ángulo que forman las dos caras AOC , BOC , que se juntan en la arista OC , es igual al de las tangen-

tes OT, OT'; y este ángulo TOT' es el observado reducido al horizonte, y mayor que el de las cuerdas AOB. Si permaneciendo el punto O en su posición se imagina que bajan A, B, creciendo los lados OA, OB disminuirá el ángulo AOB de las cuerdas: por consiguiente, cuanto mayor sea el triángulo geodésico también será mayor el exceso esférico. Si en dicho triángulo son los lados muy poco curvos, y se conocen un lado OB y los tres ángulos, se trata de reducir estos á los del triángulo de las cuerdas. El ángulo VOB (fig. 21) = VOT' — T'OB = $90^\circ - \frac{1}{2} a$. VOA $\equiv 90^\circ - \frac{1}{2} b$: y en el triángulo esférico *mnp* formado por la intersección de las cuerdas con la superficie de una esfera trazada desde O como centro, la medida del ángulo VOB es *mn* = $90^\circ - \frac{1}{2} a$, la de VOA es *mp* = $90^\circ - \frac{1}{2} b$, y el ángulo *m* que mide la inclinación de las caras de la pirámide es igual al de las tangentes O. Si llamamos O' el ángulo AOB de las cuerdas, que es =, *pn*, se tendrá en el triángulo *mnp*

$$\cos pn = \cos O' = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos O,$$

poniendo en lugar de los senos y cosenos de los lados los cosenos y senos de sus complementos, y cos O por cos *m*. Calcularemos con *a*, *b* en lugar de $\frac{1}{2} a$, $\frac{1}{2} b$, y haremos después las compensaciones. Si llamamos $\mathcal{E}$ el exceso esférico de O sobre O',

$$O' = O - \mathcal{E},$$

$$\cos O' = \cos O \cos \mathcal{E} + \sin O \sin \mathcal{E};$$

pero como $\mathcal{E}$ es una cantidad muy pequeña su seno = $\mathcal{E}$ su coseno = 1; y

$$\cos O' = \cos O + \mathcal{E} \sin O.$$

De estos dos valores de $\cos O'$ se hace

$$\cos O + \mathcal{E} \sin O = \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos O,$$

cuya ecuacion, substituyendo los dos primeros términos de las series del seno y del coseno, se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \sin O &= ab - \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \cos O, \\ \mathcal{E} &= \frac{a b - \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \cos O}{\sin O}. \end{aligned}$$

Esta ecuacion es la misma del artículo 78 para reducir los ángulos al plano horizontal, y del mismo modo que allí se obtuvo la fórmula de Legendre, obtendriamos aquí

$$\mathcal{E} = \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \sin 1'' \tan \frac{1}{2} O - \left(\frac{a - b}{2} \right)^2 \sin 1'' \cot \frac{1}{2} O.$$

Pongamos ahora $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ por a , b , y se tendrá

$$\mathcal{E} = \left(\frac{a + b}{4} \right)^2 \sin 1'' \tan \frac{1}{2} O - \left(\frac{a - b}{4} \right)^2 \sin 1'' \cot \frac{1}{2} O.$$

Pero debiendo ser $\mathcal{E}$ siempre negativo cambiaremos los signos, y por último

$$\mathcal{E} = - \left(\frac{a + b}{4} \right)^2 \sin 1'' \tan \frac{1}{2} O + \left(\frac{a - b}{4} \right)^2 \sin 1'' \cot \frac{1}{2} O$$

91. Por esta última fórmula se calcula el *exceso esférico de Delambre*, con cuyo nombre se distingue de otro que se conocerá despues. Los lados a b se determinan

primero por una resolución aproximativa del triángulo esférico supuesto rectilíneo, y después se reducen de sus medidas lineales á segundos para introducirlos en la fórmula: esta reducción se hace á razón de 30,87057 metros por segundo, suponiendo la latitud media de 45°, pero este número es variable con las diferentes latitudes. Supongamos un caso en que

$$a = 39561 \text{ metros} = 1281'',53$$

$$b = 37586 \dots \dots = 1217, 55$$

$$O = 61^{\circ}48'18'';$$

$$\frac{a + b}{4} = 624'',77$$

$$\frac{a - b}{4} = 16'';$$

y calculemos el exceso esférico $\mathcal{E}$ de O sobre O' .

$$2 \log. 624'',77 \dots \dots \dots 5,5914404$$

$$\log. \text{sen } 1'' \dots \dots \dots 4,6855749$$

$$\frac{1}{2} O = 30^{\circ}54'9'', \log. \text{tang} \dots \dots 9,7770990$$

$$- 1'',1327 \dots \dots \log \dots \dots \dots 0,0541143$$

$$2 \log. 16'' \dots \dots \dots 1,4082399$$

$$\log. \text{sen } 1'' \dots \dots \dots 4,6855749$$

$$\log. \cot \frac{1}{2} O \dots \dots \dots 0,2229910$$

$$+ 0''000207 \dots \dots \log \dots \dots \dots 6,3167158$$

$$- 1'',1327 + 0'',0002 = - 1'',1325 = \mathcal{E}.$$

Así, el ángulo de las cuerdas $O' = O - \varepsilon = 61^{\circ} 48' 18'' - 1,1325 = 61^{\circ} 48' 16,87$. Se calcularia del propio modo con los lados a, c el ángulo que forman B reducido al de las cuerdas; y con b, c el A. Si despues de reducidos los tres ángulos no diere su suma 180° se habrán cometido errores de observacion, que se repartirán por tercios á los tres ángulos para que sumen 180° . Despues de esta operacion se substituye por el lado a tomado por base la línea geodésica, que es la mas corta distancia entre los extremos reducidos al nivel del mar, y cuya fórmula daremos adelante; y esta línea se reduce á su cuerda por la fórmula $\varphi - k = \frac{1}{24R^2} \times \varphi^3$ del artículo 89. Sea por ejemplo esta línea geodésica:

$$\varphi = a = 39561 \text{ metros:}$$

$$3 \log. a = \log. 39561 \dots\dots 3,7918019$$

$$\log. \frac{1}{24R^2} \dots\dots\dots 5,0118476$$

$$0,063628 \dots\dots\dots \log \dots \dots \dots \underline{8,8036495}$$

Cuerda del arco $a = 39561 - 0,064 = 39560,936$ metros.

Teniendo ya en el triángulo rectilíneo los ángulos y un lado, se puede resolver por las reglas comunes de trigonometría; y en los demas triángulos de la cadena que se apoyan sobre éste, habrá solo que reducir los ángulos esféricos á rectilíneos, y proceder á la resolucion con los datos suficientes.

92. Se podrian resolver los triangulos considerándolos como esféricos despues de haber corregido los ángulos de los errores de observacion determinados por medio del esceso esférico, partiendo de una base en medidas lineales. Que sea por ejemplo esta base a ; se calcula su seno en metros ó partes del radio por la ecuacion

$$\text{sen } a = a \left(1 - \frac{a^2}{6R^2} \right),$$

$$\log. \text{sen } a = \log. a - \frac{Ma^2}{6R^2},$$

tomando solo el primer término de la serie logarítmica, en donde es M el módulo. Introduciendo el valor de R , para la media latitud de 45° , en metros, se tiene el logaritmo constante de $\frac{M}{6R^2} = 5,2516916$. Supongamos $a = 28976$ metros:

log. a	4,4620384
$2 \log. a =$	8,9240768
log. $\frac{M}{6R^2}$	5,2516916
log. $\frac{Ma^2}{6R^2}$	4,1757684
	0,0000015

$$\log. \text{sen } a = 4,4620384 - 0,0000015 = 4,4620369.$$

Con este último logaritmo se calculan los de los senos de los otros lados, y estos se reducen á logaritmos de números por la ecuacion

$$\log. a = \log. \text{sen } a + \frac{Ma^2}{6R^2},$$

$$\log. a = 4,4620369 + 0,0000015 = 4,4620384.$$

Se podría aplicar igualmente la analogía de los cuatro senos, reduciendo la base a á segundos.

93. De todos los métodos de resolver los triángulos el mas sencillo es el que resulta del teorema de Legendre, que es el siguiente. *Un triángulo esférico muy poco curvo corresponde á un rectilíneo cuyos lados son iguales á los del primero, y cuyos ángulos son cada uno igual al correspondiente esférico menos un tercio del exceso de los tres del triángulo esférico sobre los 180° del rectilíneo.* Si A, B, C , son los ángulos del triángulo esférico, los lados opuestos a, b, c , serán los del rectilíneo, y cada ángulo de éste será $A - \frac{1}{3}\epsilon$, $B - \frac{1}{3}\epsilon$, $C - \frac{1}{3}\epsilon$, siendo ϵ el exceso esférico sobre los 180° del triángulo rectilíneo. Sean a, b, c , los lados de un triángulo esférico cuando el radio es R ; los de otro semejante en una esfera de radio 1. serán $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$, porque

$$R : 1 :: a : \frac{a}{R}, \text{ etc.}$$

De la ecuacion fundamental de los triángulos esféricos

se despeja, llamando $\frac{a}{R} = \alpha$, $\frac{b}{R} = \beta$, $\frac{c}{R} = \gamma$,

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

escribiendo en lugar de los senos dos términos de sus series, y en lugar de los cosenos tres, esto es, por $\sin \beta =$

$$\beta - \frac{\beta^3}{6}, \sin \gamma = \gamma - \frac{\gamma^3}{6}, \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}$$

$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}$, $\cos \gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{24}$, haciendo las multiplicaciones conforme se ha prevenido en el párrafo 90, y reduciendo los quebrados á comunes denominados, resulta

$$\cos A = \frac{\frac{1}{2} (\beta^2 + \gamma^2 - a^2) + \frac{1}{24} (a^4 - \beta^4 - \gamma^4) - \frac{1}{4} \beta^2 \gamma^2}{\beta \gamma (1 - \frac{1}{6} \beta^2 - \frac{1}{6} \gamma^2)}$$

subiendo como factor el trinomio $1 - \frac{1}{6} \beta^2 - \frac{1}{6} \gamma^2$, ó sea

el binomio $1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}$, exaltando la potencia hasta el segundo término, multiplicando y reduciendo,

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - a^2}{2\beta\gamma} + \frac{a^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2a^2\beta^2 - 2a^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma}$$

y restituyendo $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, que son a , β , γ , quedará una

ecuacion de la misma forma y con iguales combinaciones,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24bcR^2}$$

Supongamos ahora que A' sea el ángulo del triangulo rectilíneo opuesto al lado a ; como los lados de este triangulo han de ser iguales á los del esférico

$$\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

que es la primera parte del valor de $\cos A$. Elevando al

cuadrado esta ecuacion, escribiendo $1 - \text{sen}^2 A'$ por $\cos^2 A'$, quitando el denominador y reduciendo, se tiene

$$- 4 b^2 c^2 \text{sen}^2 A' = a^4 + b^4 + c^4 - 2 a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2$$

que es el numerador de la otra parte del valor de $\cos A$, Substituyendo, pues, en dicho valor y simplificando, resulta

$$\cos A = \cos A' - \frac{b c \text{sen}^2 A'}{6 R^2}.$$

Llámesese x el exceso del ángulo esférico sobre el ángulo plano, de modo que $A = A' + x$; entonces $\cos A = \cos A' - x \text{sen} A'$ por ser $\cos x = 1$ y $\text{sen} x = x$: luego

$$\cos A' - x \text{sen} A' = \cos A' - \frac{b c}{6 R^2} \text{sen}^2 A';$$

$$x = \frac{b c}{6 R^2} \text{sen} A',$$

y ya que $A = A' + x$

$$A = A' + \frac{b c}{6 R^2} \text{sen} A',$$

$$A' = A - \frac{b c}{6 R^2} \text{sen} A',$$

Pero $\frac{1}{2} b c \text{sen} A$ es la superficie del triangulo rectilíneo cuyos lados son a, b, c , y es tan corta la diferencia de esta superficie á la del triangulo esférico que se pueden

tomar la una por la otra; y así, llamando s dicha superficie, se tendrá

$$A' = A - \frac{s}{3R^2}$$

Como este resultado para A' se habria obtenido igualmente para los otros ángulos B, C , se infiere

$$B' = B - \frac{s}{3R^2},$$

$$C' = C - \frac{s}{3R^2},$$

$$A' + B' + C' = A + B + C - \frac{s}{R^2},$$

Si es ϵ el exceso esférico, $\epsilon = \frac{s}{R^2}$, porque está enrazon de la superficie del triangulo; y como $A' + B' + C' = 180^\circ$,

$$A + B + C = 180^\circ + \frac{s}{R^2}.$$

Despues de medidos los tres ángulos de un triangulo sobre el terreno, y de haberles aplicado las correcciones de reduccion al plano horizontal y al centro de estacion se sumarán, y lo que esceda la suma de 180° se dividirá por 3; y el cociente se restará de cada uno de los ángulos. Habiendo llegado á este punto se procede á la resolucion del triangulo rectilíneo. Tal es el resultado sencillísimo adonde nos ha conducido el ingenio de Legendre.

94. Pero se puede calcular el valor del exceso esférico

por la fórmula $\epsilon = \frac{s}{R^2}$ reemplazando s por la superficie

del triángulo esférico considerado como rectilíneo $= \frac{1}{2} bc \sin A$; con lo que

$$\epsilon = \frac{bc}{2R^2} \sin A. (1)$$

La cantidad constante $\frac{1}{2R^2}$ se debe calcular con el va-

lor de R que conviene al país en donde se hace la triangulación A los 20° de latitud, y suponiendo $a = 0,003236$ es $R = 6.374691$ metros, su logaritmo $= 6,8044592$, y el de R^2 $13,6089184$; y así

log. 2.....	0,3010300
log. R^2	3,6089184
log. $\sin 1''$	4,6855749

8,5955233
10

$$\log. \frac{1}{2R^2 \sin 1''} \dots\dots\dots 1,4044767$$

Se ha introducido el seno de $1''$ para obtener en segundos el valor de ϵ dado por la fórmula cuando se conocen en el triángulo esférico dos lados b, c , y el ángulo A que forman. Si los datos fueran un lado a y los ángulos adyacentes B, C , se tendría

$$\text{sen } A = \text{sen } (B + C),$$

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A},$$

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } (B + C)},$$

la superficie $\frac{1}{2} bc \text{ sen } A = \frac{a^2}{2} \times \frac{\text{sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } (B + C)}$, y

$$\varepsilon = \frac{1}{2 R^2 \text{ sen } 1''} \times \frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } (B + C)}. \quad (2)$$

95. Cuando se calcula por estas fórmulas el valor de ε se pueden conocer los errores de observacion. Sea por ejemplo el triángulo de la cadena del Sr. Velazquez de León formado con los puntos Zumpango de la Laguna, Teoloyuca

y Cerro del Sincoque: por la primera fórmula $\varepsilon = \frac{b c}{2 R^2}$

sen A calculemos el exceso esférico (fig. 22).

$$b = 20927 \text{ varas} \dots \log \dots 4,3207070$$

$$c = 17647 \dots \log \dots 4,2466709$$

$$A = 37^\circ 17' \dots \log. \text{ seno} \dots 9,7822984$$

$$\text{Constante } \frac{1}{2 R^2 \text{ sen } 1''} \dots \log \dots 1,4044767$$

$$\varepsilon = 0'', 567 \dots \log \dots 9,7541530$$

Por la segunda fórmula con el lado b y los ángulos ad-

yacentes A, C , $\epsilon = \frac{1}{2 R^2 \sin 1''} \times \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin (A + C)}$; y este

caso ocurre mas comunmente en la práctica:

log. b^2	8,6414140
log. $\sin A$	9,7822984
$C = 57^\circ 12'$, log. seno.....	9,9245721
log. constante.....	1,4044767
Comp. log. $\sin [A + C]$	0,0013309
<hr/>	
$\epsilon = 0'',567$log.....	9,7540921

Restando de cada uno de los ángulos $\frac{1}{3} \epsilon = 0'',189$ quedan

$$\begin{aligned} A &= 37^\circ 17' - 0'',189 = 37.^\circ 16'.59'',811 \\ B &= 85.^\circ 30' - 0'',189 = 85. 29. 59, 811 \\ C &= 57. 12 - 0, 189 = 57. 11. 59, 811 \end{aligned}$$

Suma..... $179.^\circ 58'.59'',443$;

faltan, pues, para los 180° del triangulo rectilíneo $1'.00'',567$ por errores de observacion. En casos como este se agrega ó se quita á cada uno de los ángulos la tercera parte del error para completar los 180° . Se deja entender que si no se miden directamente los tres ángulos de un triangulo puede haber necesidad de una resolucion provisional para obtener los datos á fin de determinar el esceso esférico, y que una vez conocido por la segunda fórmula se ha de aplicar la correccion á los dos ángulos que se conocen,

y restar despues su suma de 180° para obtener el tercero correcto.

° 96. Cuando se ha formado una carta, ó se han delineado los triangulos de una cadena, se puede calcular el esceso esférico midiendo por medio de una escala y del compas las alturas de dichos triangulos, y substituir en la

fórmula $\epsilon = \frac{s}{R^2 \sin 1''}$ la mitad del producto de la base por

la altura en lugar de s , lo que proporciona suficiente esactitud; pues que las variaciones de ϵ son demasiado pequeñas aunque la base y la altura del triangulo aumenten ó disminuyan considerablemente. Repetiremos que no hay necesidad de calcular ϵ cuando se han observado los tres ángulos de un triangulo sobre el terreno, porque entonces basta repartir lo que sobre de 180° entre los ángulos como se ha demostrado por el teorema de Legendre: y si la suma de los tres ángulos fuere menor que 180° tambien se repartirá por partes iguales el error de observaciones, en el cual va incluso el del esceso. En el triangulo Zumpango, Teoloyuca, Sincoque, la suma de los tres ángulos es de $179^\circ 59'$; hay, pues, que agregar $20''$ á cada uno de ellos. Pero es indispensable determinar el esceso cuando se mide una línea meridiana por triangulacion, y cuando se determinan las longitudes, latitudes y azimutes de los vértices de una cadena, como se verá despues. De las fórmulas de ϵ se forman tablas para facilitar los cálculos.

CAPITULO V.

De la méridiana terrestre y de sus perpendiculares; de las latitudes, longitudes y azimutes de los vértices de los triángulos.

97. En el segundo curso de matemáticas se ha explicado el modo de trazar sobre la tierra una línea meridiana por lo que diremos solamente algunas palabras que sirvan de recordacion, y despues trataremos este asunto con mas estension. Un plano que eortase á toda la esfera eeeste, y que pasase por el eje de la tierra, eortaria tambien á este planeta en dos partes iguales, suponiendo

ser un elipsoide de revolución; el trazo que se puede imaginar dejaría el plano sobre la superficie del elipsoide, sería el meridiano, y una parte suya la *línea meridiana*. En tal supuesto, todas las normales de los diferentes puntos de la meridiana estarían en el plano secante, y cortarían al eje de la tierra; sería, pues, la meridiana una *curva plana*. Realmente es la tierra un esferoide irregular, y por consiguiente no están todas las normales en un mismo plano; y así es que la meridiana tiene *doble curvatura*. Esta irregularidad ó anomalía es tan pequeña que se desprecia en todos los cálculos geodésicos, como se ha dicho en otra parte, y se establecen las fórmulas como si la tierra fuera elipsoidal.

98. Un observador que dirija su visual al polo, ó en el plano vertical del meridiano, y que inclinando cuanto basta el anteojo, mande plantar piquetes en esta direccion, habrá trazado sobre la tierra una línea meridiana. Si despues mide la distancia que media entre el punto de partida y el último piquete con todas las circunstancias que exige una buena base, y determina ademas la diferencia de latitudes de los extremos de la línea, podrá calcular la estension de un grado del meridiano; porque si a segundos, diferencia de latitudes, abrazan una estension b de varas, metros....., 3600 segundos de un grado abrazarán x varas. La latitud del medio del grado sirve para denominarlo; y así se dice que á los 16° de latitud septentrional tiene el grado del meridiano 110653 metros, y 111.116 á los 45° .

99. Este método de medir la meridiana no es el mas usado; sino que se forma una cadena de triángulos en la direccion norte sur poco mas ó menos, y por ellos se cal-

cula la parte del meridiano comprendido entre la primera y última estaciones. Supongamos que partiendo del punto A, (fig. 23,) y apoyándose sobre una base AB, un ingeniero haya hecho una triangulación que termine en L, y que quiera saber cuál es la amplitud de la meridiana comprendida entre las estaciones A y L, ó de la línea AX. Todos los triángulos estarán reducidos al plano horizontal nivel del mar, se habrá calculado el exceso esférico ϵ para cada triángulo, y determinado con la mayor exactitud el azimut XAB de la base. Prolongando el lado CD hasta encontrar en M la meridiana, se formará el triángulo esférico ACM, en el cual serán conocidos AC por la triangulación, el azimut $CAM = CAB - BAM$, y la suma de los dos ángulos parciales C: determinando el exceso esférico se tendrá $A + C + M = 180^\circ + \epsilon$, y reduciendo el triángulo á rectilíneo $(A - \frac{1}{3} \epsilon) + (C - \frac{1}{3} \epsilon) + (M - \frac{1}{3} \epsilon) = 180^\circ$; se determinan despues los lados CM, AM. Dividiendo el cuadrilátero MDFO en dos partes con la diagonal MF, se podrá resolver el triángulo DMF, pues se conocen DF por la triangulación, $DM = MC - CD$, y el ángulo $MDF = 180^\circ - CDE - EDF$: y en el otro triángulo MFO se puede calcular MO siendo conocidos MF por la resolución anterior, $OMF = 180^\circ - AMF$, $OFM = 360^\circ -$ los otros ángulos en F. En OHP se conocen $OH = HF - FO$, el ángulo O opuesto al vértice, y $OHP = OHG + GHJ$; se determinará OP. Fácil es continuar la resolución de las otras partes de la meridiana hasta X, pié de la perpendicular LX, aplicando á cada triángulo la corrección del exceso esférico; y la suma $AM + MO + OP + PT + TX =$ meridiana.

100. Este método geométrico de medir una parte del

meridiano es ^{de} Legendre: tiene la ventaja de que se pueden verificar las operaciones eligiendo otros triángulos, como ABN en lugar de ACM, y determinar las partes AN.... y todos los resultados deben ser iguales cuando no se han cometido errores en los cálculos; pero tiene el inconveniente, aunque pequeño, de necesitar una figura ó plano de la triangulación. Ya veremos otro método analítico.

DE LAS COORDENADAS GEOGRAFICAS.

101. Se determina la posicion de un punto sobre la tierra por sus coordenadas, que son la diferencia de latitudes, y la de longitudes; ó mas bien la latitud y la longitud geográficas. Estas son las líneas que bastan para formar las cartas; pero tambien se usa de una tercera coordenada, que es la altura de la estacion sobre el nivel del mar, y de la cual trataremos en otro capítulo. Se sabe que las latitudes se cuentan desde el ecuador hácia los polos sobre los meridianos, que se suponen ejes de las abscisas; y las longitudes en partes del ecuador al Oriente y al Poniente de uno de los meridianos, y con signos diferentes para evitar equivocaciones: las orientales llevarán el signo + y las occidentales el —

102. Si fuera la superficie de la tierra plana, como se puede suponer en algunos casos, la posicion de un punto M, (fig. 24) se determinaria por las líneas $AP = x$, $PM = y$: la primera representa la diferencia de latitudes de los puntos A, M, y la segunda la de sus longitudes. Supongamos que AM sea lado conocido de un triángulo, y que se haya observado su azimut PAM: en el triángulo rectángulo formado por la parte AP de la meridiana, por la

perpendicular PM, y por el lado AM de una cadena de triángulos se tendrá.

$$AP = x = AM \cos z,$$

$$PM = y = AM \sin z,$$

llamando z el azimut PAM. Así determinados AP, PM se reducen á partes del ecuador á razon de 36,83839 varas de México, ó de 30,87057 metros por cada segundo. Para mayor exactitud, se calcula la estension del grado meridiano para el país en donde se trabaja, por la proporcion del artículo 30, y de ella se deduce la correspondiente á 1". En el ecuador, por ejemplo, es el grado de 110571 metros; y á los 45° de latitud de 111116; la diferencia es 545: se dirá 545, aumento á 45°, es con x ; aumento á 20°; como $\sin^2 45^\circ$ es con $\sin^2 20^\circ$. De aquí resulta $x = 127^m$, que agregados á los 110571 del ecuador, hacen 110698 metros, grado del meridiano á 20° de latitud; este número de metros repartido entre los 3600' del grado dan para 1" 30,74944 metros. Que sea 20° 30' norte la latitud de la estación A, su longitud 68° 10' al oriente de un primer meridiano; y que hayan resultado $AP = 3565$ varas, $PM = 864$: usando el número 36,83839, la primera de estas líneas corresponde á 1' 36,"8, y la segunda á 23,"4. De esto se deduce que la latitud del punto M es de $20^\circ 30' + 1' 36,"8 = 20^\circ 31' 36,"8$; y su longitud de $68^\circ 10' + 23,"4 = 68^\circ 10' 23,"4$ puesto que M está mas al Oriente que A.

103. Al formar el plano con el resultado de las operaciones, se puede situar el punto M por medio de sus dos coordenadas x, y , ó bien por el azimut y la distancia AM: en este último caso se forma en A con el transportador el

ángulo $NAM = z$, se tira una línea indefinida AM , y sobre ella se lleva la distancia AM ; así queda situado el punto M á rumbo y distancia. Aunque estos principios pertenecen mas bien á la Topografía, ha parecido conveniente recordarlos para que se entienda con mas facilidad lo que tenemos que decir en este capítulo.

104. La figura 25 representa una cadena de triángulos cuyo origen está en A : se supone observado el azimut $NAB = z$ de la base AB , y se trata de determinar las coordenadas de todos los vértices $A, B, C, D, \dots$. Llévensse perpendiculares y paralelas á la meridiana AN del punto de partida A para formar triángulos rectángulos, que tengan por hipotenusas los lados $AB, AC, BD, \dots$. En el primero de estos triángulos ABb se conocen AB que es la base, y el azimut BAb ; se podrán determinar $Ab = x$, $Bb = y$, que son las coordenadas del vértice B . En ACc se tienen conocidos AC , y el azimut $CAc = eAB - CAB$; se calcularán Ac y cC , coordenadas del punto C . En BDb se conocen BD y $DBd = 90^\circ - CBb - DBC$, con cuyos datos se podrán determinar Bd y Dd ; serán, pues, la latitud del punto D , $Ab + Bd$, y la longitud respecto al punto de partida $bB - dD$. En EDe se tienen ED y el azimut $EDe = 360^\circ -$ la suma de los otros ángulos en D , para calcular Ee y De ; será, pues, de la estación E $xAd' + De$, y su longitud $Ee - Dd' = e'E$, á la cual se pondrá el signo $-$ por haber resultado occidental. Por último, en EFf se conocen EF y el azimut $FEf = 90^\circ - FEE$, y se resolverán Ef y fF ; la latitud de F será $Ae' + Ef'$, y su longitud $fF - Ee' = Ff'$ con signo $+$ por ser oriental. Se echa de ver que por este método se termina la diferencia de latitudes de dos estaciones estremas,

la amplitud de la meridiana, y por consiguiente la estension de un grado con alguna aproximacion.

105. Este método para determinar las coordenadas no tiene toda la exactitud posible, pero es usado por los geógrafos, atendiendo á la comodidad y sencillez que presenta; y lo empleó Cassini para formar la carta de Francia: en otra parte se explicará su proyeccion. En un país que no tenga muy grande estension se puede suponer plana la superficie de la tierra, los meridianos líneas paralelas y rectas, y lo mismo los paralelos al ecuador; resultando de esta suposicion una carta plana formada de cuadrados iguales, cuyo lado espresa la division del ecuador y del meridiano de grado en grado, de 30 en 30 minutos, ó de otra estension proporcionada á la del país cuya carta se ha de formar, y al tamaño de la escala que se ha elegido. Por un lugar central se hacen pasar el primer meridiano y el paralelo medio: la primera de estas líneas sirve de eje de las x y la segunda de eje de las y . Al Oriente y al Poniente se trazan las líneas Norte Sur, y perpendiculares á ellas al Norte y al Sur las de Oriente Poniente. Toda la proyeccion queda así dividida en cuatro cuadros que llamaremos, el primero del Nordeste, el segundo del Noroeste, el tercero de Suroeste y el cuarto del Sureste. Si se hace situar un punto en el primer cuadro, tendrá su latitud contada desde el centro de la carta origen de las coordenadas, el signo $+$; y el mismo la longitud por ser oriental respecto al primer meridiano: en el segundo cuadro serán $+x$ por estar al Norte del paralelo medio, y $-y$ por estar al poniente del meridiano: en el tercero $-x$ al Sur del paralelo medio, y $-y$ al Poniente del meridiano: y en el cuarto $-x$ al Sur del paralelo y $+y$ al Oriente del meridia-

no. De este modo quedará situado cada punto en la carta á dos compases por medio de sus coordenadas.

106. Cuando se resuelven los triángulos rectángulos de la figura 25, para tener alguna mas exactitud se puede aplicar á cada triángulo la correccion del exceso esférico de Legendre. Entonces la latitud de la última estacion comparada con la del punto de partida daria un número de segundos correspondientes á la estension lineal de la parte del meridiano abrazada por la triangulacion, y por consiguiente la del grado del meridiano con mas aproximacion que por el artículo 104. Pero ni uno ni otro de estos métodos proporciona la exactitud posible; pues en el primero se ha supuesto plana la superficie de la tierra, y en este último que los triángulos son formados por arcos de círculos máximos de una esfera, cuando la tierra debe suponerse á lo mas un elipsoide de revolucion. Vamós á tomar otro arbitrio para determinar las latitudes, las longitudes y los azimutes de los objetos terrestres.

DE LAS LATITUDES.

107. Sean, (fig. 26), P un polo de la tierra, PA, PB dos meridianos, AN, BO las normales de los puntos A, B. Se supone conocida la latitud L de un punto de partida A, ó el ángulo ANH; y se trata de determinar la latitud L' del punto B extremo de la línea geodésica $AB = K$. Para hallar $L - L'$, ó la diferencia de las inclinaciones de las normales AN, BO, que no están en un mismo plano, sobre el del ecuador, tiremos la línea BN que formará con dicho plano un ángulo α : buscaremos los valores de $L - \alpha$, $\alpha - L'$, y eliminaremos α . Supongamos que desde el centro N, y con un radio $= 1$ se describa una esfera; su

$$\text{sen } L - \frac{x^2}{2} \text{sen } L - x \cos L = \text{sen } L - \frac{\varphi^2}{2} \text{sen } L - \varphi \cos L \cos z,$$

$$\frac{x^2}{2} \text{sen } L + x \cos L = \frac{\varphi^2}{2} \text{sen } L + \varphi \cos L \cos z.$$

Si resolviéramos esta ecuacion de segundo grado con respecto á x , resultaria un valor irracional; pero considerando que son muy pequeños x , φ podremos suprimir los términos cuadrados para obtener por ahora un valor aproximativo

$$x = \varphi \cos z, \quad x^2 = \varphi^2 \cos^2 z,$$

que substituido en la última ecuacion la trasforma en esta de primer grado

$$\frac{\varphi^2}{2} \cos^2 z \text{sen } L + x \cos L = \frac{\varphi^2}{2} \text{sen } L + \varphi \cos L \cos z;$$

y de aquí despejando

$$x = \varphi \cos z + \frac{\varphi^2}{2} \text{tang. } L (1 - \cos^2 z) = \varphi \cos z + \frac{\varphi^2}{2} \text{tang. } L \text{sen}^2 z.$$

Este es el valor x de $L - \lambda$.

108. Busquemos ahora $\lambda - L'$. Siendo BO la normal del punto B, el ángulo OBN es la diferencia entre λ y L' llevemos desde N la perpendicular NM sobre la prolongacion de BO, y tendremos en el triángulo rectángulo NBM $\text{sen NBM} = \frac{MN}{BN}$; y como el ángulo B es muy pequeño tomaremos el arco por el seno, y con esto

$$B = \lambda - L' = \frac{MN}{BN} :$$

$MN = NO \cos MNO$, y $MNO = L'$ porque los lados que forman estos ángulos son perpendiculares respectivamente, y así

$$\lambda - L' = \frac{NO}{BN} \cos L'$$

Tambien se tiene $NO = NC - CO$, que es la diferencia entre las subnormales de los puntos A, B; y como BN se puede suponer igual con AN, que es la normal de A, resulta haciendo las substituciones

$$\lambda - L' = \frac{NC - CO}{AN} \cos L'$$

Recordando que el artículo 23 dá

$$NC = \frac{ae^2 \sin L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} , \quad CO = \frac{ae^2 \sin L'}{(1 - e^2 \sin^2 L')^{\frac{1}{2}}} ,$$

$$AN = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} ,$$

la última ecuacion vendrá á ser

$$\lambda - L' = \left\{ \left(\frac{ae^2 \sin L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ae^2 \sin L'}{(1 - e^2 \sin^2 L')^{\frac{1}{2}}} \right) \times \frac{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a} \right\} \cos L' :$$

la diferencia entre las latitudes L , L' es siempre muy pequeña, por lo que se pueden suponer iguales los denominadores $(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}$, $(1 - e^2 \sin^2 L')^{\frac{1}{2}}$; y con esta suposición

$$\lambda - L' = e^2 (\sin L - \sin L') \cos L'.$$

Se sabe que $\sin L - \sin L' = 2 \sin \frac{1}{2} (L - L') \times \cos \frac{1}{2} (L + L')$; por consiguiente

$$\lambda - L' = 2 e^2 \sin \frac{1}{2} (L - L') \cos \frac{1}{2} (L + L') \cos L':$$

también la cuerda de un arco $L - L' = 2 \sin \frac{1}{2} (L - L')$, y siendo $L - L'$ muy pequeño, se confunde con su cuerda; luego

$$\lambda - L' = e^2 (L - L') \cos \frac{1}{2} (L + L') \cos L'$$

Aun se puede simplificar esta ecuación considerando que el factor $L - L'$ es muy pequeño, puesto que los lados de los triángulos deben proporcionarse siempre al buen alcance de los anteojos de los instrumentos; y por consiguiente $\frac{1}{2} (L + L') = L' = L$, con lo que

$$\lambda - L' = e^2 (L - L') \cos^2 L.$$

109. Como estos cálculos se dirigen á determinar $L - L'$, ó L' es menester que desaparezca λ , y lo conseguiremos sumando esta última ecuación con la de x del artículo 107, poniendo por x $L - \lambda$; será, pues,

$$L - L' = e^2 (L - L') \cos^2 L + e \cos z + \frac{e^2}{2} \tan L \sin^2 z.$$

Despejando $L - L'$, pasando el denominador al numerador, haciendo la potencia hasta el segundo término, é indicando las multiplicaciones,

$$L - L' = \varphi (1 + e^2 \cos^2 L) \cos z + \frac{\varphi^2}{2} (1 + e^2 \cos^2 L)$$

$$\text{tang } L \text{ sen}^2 z.$$

$$\text{Pero } (\varphi)'' = \frac{K}{N} = \frac{K (1 - e^2 \text{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \text{sen } l''} (\varphi^3)'' =$$

$$\frac{K^2 (1 - e^2 \text{sen}^2 L)}{a^2 \text{sen}^2 l''}; \text{ y así}$$

$$L - L' = \frac{K (1 - e^2 \text{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \text{sen } l''} (1 + e^2 \cos^2 L) \cos z +$$

$$\frac{K^2 (1 - e^2 \text{sen}^2 L)}{2 a^2 \text{sen}^2 l''} (1 + e^2 \cos^2 L) \text{tang } L \text{ sen}^2 z$$

$$\text{Hagamos para abreviar } \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \text{sen } l''} (1 + e^2 \cos^2 L)$$

$$= P, \text{ y } \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2 L)}{2 a^2 \text{sen}^2 l''} (1 + e^2 \cos^2 L) \text{tang } L = Q; \text{ la}$$

fórmula será

$$L - L' = P K \cos z + Q K^2 \text{sen}^2 z.$$

$$L' = L - P K \cos z - Q K^2 \text{sen}^2 z.$$

Se forma tabla de los diferentes valores de los coeficientes P, Q.

DE LAS LONGITUDES.

110. Supongamos que PAB, (fig. 26,) esté trazado sobre una esfera cuyo centro sea N extremo de la grande

normal del punto A, y cuyo radio sea la unidad: se quiere determinar el ángulo P, que es la diferencia de meridianos de los puntos de estacion A, B. Es claro que

$$\text{sen } P = \frac{\text{sen } A \text{ sen } BA}{\text{sen } BP},$$

pero $\text{sen } A = \text{sen } z$, porque A es el suplemento del azimuth z , $\text{sen } BA = \text{sen } \phi$ por la denominacion dada en los artículos precedentes, y $\text{sen } BP = \text{sen } (90^\circ - L')$; así que

$$\text{sen } P = \frac{\text{sen } z}{\cos L'} \times \text{sen } \phi$$

La diferencia entre las longitudes de un lado de un triángulo, es siempre muy pequeña, y tambien lo es el lado ϕ ; se pueden, pues, tomar los arcos por los senos, y en este caso

$$P = \frac{\text{sen } z}{\cos L'} \times \phi \dots (1)$$

Para reducir esta ecuacion á la superficie del elipsoide terrestre, substituiremos en lugar de ϕ su valor

$\frac{K (1 - e^2 \text{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \text{ sen } 1''}$ del artículo anterior, en donde espres-

sa K la estension lineal del lado AB, y se tendrá

$$P = \frac{K (1 - e^2 \text{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \text{ sen } 1''} \times \frac{\text{sen } z}{\cos L'}$$

Esta es la diferencia de longitudes que buscamos, de cuya fórmula se reducen á tabla los diferentes valores del

$$\text{coeficiente } \frac{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \sin 1''}.$$

Tales son las elegantes fórmulas para latitudes y longitudes de Mr. de Salneuve.

DE LOS AZIMUTES.

111. Supongamos primero paralelos los meridianos de los extremos del lado AB sobre el cual se apoye una cadena de triángulos (fig. 27). Un observador colocado en A mide el ángulo EAB = z , contado desde el Sur hasta 180° al Oriente ó al Poniente, y de este deduce el azimut z' ; porque E'BA = $180^\circ - ABP = 180^\circ - z$. Si se contaran los azimutes desde el Sur al Poniente hasta 360° , el de A contado desde B seria z'' , y entonces $z'' = 180^\circ + PBA = 180^\circ + z$. Si ahora se considera que el meridiano EA concurre con el otro EP en el polo P, se echará de ver que z es siempre algo mayor que ABP, y que no es tan sencilla la determinacion de un azimut por medio de otro en las operaciones geodésicas cuando se quiere emplear cuanta exactitud es posible.

112. Habiendo observado el azimut EAB, (fig. 26), se desea conocer E'BA = z' , ó su suplemento PBA. En el triángulo esférico PBA, por la cuarta analogía de Neper, se tiene

$$\text{tang } \frac{1}{2} (A + B) = \cot \frac{1}{2} P \times \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} :$$

y como el lado AB es muy pequeño, AP, BP son muy poco convergentes, y el ángulo PAB difiere poco de EBA; así, llamando y la pequeña diferencia, habrá las ecuaciones $B = 180^\circ - (A + y) = 180^\circ - A - y$, $A + B = 180^\circ - y$, $\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}y$. Por consiguiente,

$$\cot. \frac{1}{2}y = \cot. \frac{1}{2}P \times \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)},$$

$$\frac{1}{\tan \frac{1}{2}y} = \frac{1}{\tan \frac{1}{2}P} \times \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)}$$

Las tangentes de $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}P$ son tan pequeñas que pueden ser substituidas por los arcos, con lo que

$$\frac{1}{\frac{1}{2}y} = \frac{1}{\frac{1}{2}P} \times \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)},$$

quitando los denominadores y despejando,

$$\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}P \times \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}(a - b)}.$$

Recordando ahora que $a = 90^\circ - L'$, $b = 90^\circ - L$, serán

$$a + b = 90^\circ - L' + 90^\circ - L = 180^\circ - (L' + L),$$

$$\frac{1}{2}(a + b) = 90^\circ - \frac{1}{2}(L + L')$$

$$\cos \frac{1}{2}(a + b) = \cos \frac{1}{2}\{90^\circ - \frac{1}{2}(L + L')\} = \sin \frac{1}{2}(L + L');$$

$$a - b = 90^\circ - L' - 90^\circ + L = L - L',$$

$$\cos \frac{1}{2}(a - b) = \cos \frac{1}{2}(L - L').$$

Substituyendo en la ecuacion de $\frac{1}{2} y$ estos valores de $\cos \frac{1}{2} (a + b)$, $\cos \frac{1}{2} (a - b)$ resulta

$$\frac{1}{2} y = \frac{1}{2} P \times \frac{\sin \frac{1}{2} (L + L')}{\cos \frac{1}{2} (L - L')}.$$

y como de la ecuacion $B = 180^\circ - A - y$ se saca $y = 180^\circ - A - B$, siendo A, B suplementos de los azimutes z, z'

$$y = z + z' - 180^\circ;$$

y la última ecuacion de $\frac{1}{2} y$ vendrá á ser

$$\frac{z + z' - 180^\circ}{2} = \frac{1}{2} P \times \frac{\sin \frac{1}{2} (L + L')}{\cos \frac{1}{2} (L - L')}.$$

El denominador $\cos \frac{1}{2} (L - L')$ se acerca mucho á la unidad, y puede borrarse sin recelo de cometer error considerable, y entonees despejando se tendrá la fórmula

$$z' = 180^\circ - z + P \sin \frac{1}{2} (L + L'),$$

Si se contarán los azimutes desde el polo Sur al Poniente hasta 360° , siendo entonces $B = z' - 180^\circ$, como se echa de ver en la figura 27, seria el valor de $y = 180^\circ + z - z'$, y $z' = 180^\circ + z - P \sin \frac{1}{2} (L + L')$.

113. Hagamos pasar meridianos por los tres vértices de un triángulo esférico ABC: otro azimut z'' del lado BC quedará determinado con restar de 360° la suma $z' + ABC$, como se echa de ver en la figura 28. De este modo se pueden calcular las coordenadas de un vértice C por medio de las de A y de las de B, lo que proporciona verificaciones. Si PA, BP, (fig. 29), fueran dos areos de me-

ridianos, y los puntos A, B dos estaciones, en el triángulo esférico PAB se tendrían conocidos $AP = 90^\circ - L$, AB por la triangulación, y el ángulo BAP suplemento del azimut de B en A; y se podrían resolver $BP = 90^\circ - L'$, y P diferencia de meridianos, introduciendo en las fórmulas el radio de la tierra. Operando así se cometerían dos errores; el uno muy pequeño á la verdad, de suponer esférica la tierra, y el otro mas considerable, resolviendo un triángulo por las reglas comunes de trigonometría cuando un lado AB es demasiado pequeño respecto á los otros dos; pero ambos errores quedarán evitados usando las fórmulas esplicadas en este capítulo.

CAPITULO VI.

De las variaciones de las coordenadas y azimutes, medios indirectos para situar los lugares, y de la línea geodésica.

114. Puede suceder que despues de calculados los triángulos de una cadena, y de haber determinado las coordenadas y azimutes de las estaciones se encuentre algun pequeño error, que debe influir necesariamente sobre la posicion general de la red en la superficie de la tierra. Supongamos que A sea un punto de observacion, (fig. 30), B un vértice en una cadena de triángulos, y C el polo sur origen de los azimutes. Si el azimut CAB varía una pe-

queña cantidad, que no pase de algunos segundos, el punto B ocupará otro lugar en la carta, por ejemplo, en B'; y otro punto cualquiera b encadenado con B, en virtud de la rotacion de la cadena alrededor de A se pondrá en b' , de modo que $b'AB' = bAB$: las coordenadas de cada punto tendrán, pues, una pequeña variacion que importa conocer. Buscaremos las ecuaciones diferenciales de un triángulo esférico, en el cual es variable uno de los ángulos, y constantes los lados que lo forman.

115. El triángulo CAB proporciona

$$\text{sen } c = \frac{\text{sen } a \text{ sen } C}{\text{sen } A},$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos A,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \cos C.$$

Diferenciando estas dos ecuaciones haciendo constantes b c ,

$$da \text{ sen } a = d A \text{ sen } A \text{ sen } b \text{ sen } c,$$

$$0 = - da \text{ sen } a \cos b + da \cos a \text{ sen } b \cos C - d C \text{ sen } C \text{ sen } a \text{ sen } b.$$

Substituyendo en la primera diferencial el valor de $\text{sen } c$,

$$da \text{ sen } a = d A \text{ sen } A \text{ sen } b \times \frac{\text{sen } a \text{ sen } C}{\text{sen } A},$$

y de aquí despejando

$$da = d A \text{ sen } b \text{ sen } C \dots\dots(1)$$

De la segunda ecuacion diferencial se deduce

$$d C = \frac{-da \operatorname{sen} a \cos b + da \cos a \operatorname{sen} b \cos C}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

é introduciendo el valor de da

$$d C = -d A \cos b + \frac{d A \operatorname{sen} b \cos a \cos C}{\operatorname{sen} a};$$

multiplicando y dividiendo el segundo término por $\cos b$, y sacando el factor $d A \cos b$,

$$d C = -d A \cos b (1 - \operatorname{tang} b \cot a \cos C) \dots\dots (2)$$

Que sea L la latitud correcta del punto A , L' la latitud aproximada de B , z el azimut aproximado de B observado sobre el horizonte de A , y P' la diferencia aproximada de longitudes de los puntos A , B . Se cuentan los azimutes desde el sur á 180° al Oriente y al Poniente. Es claro que $da = -dL'$, pues a es la colatitud de B ; $dA = dz$, $\operatorname{sen} b = \cos L$, y $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} P'$. La ecuacion (1) se transformará segun esto en

$$d L' = -\cos L \operatorname{sen} P' dz, \dots\dots\dots (3)$$

así como la (2) en

$$d P' = \operatorname{sen} L (1 - \operatorname{tang} L' \cot L \cos P') dz \dots\dots\dots (4)$$

Luego en el caso de haberse hecho una correccion — dz , como lo indica la figura, al azimut del punto B se hará á la latitud del propio punto la correspondiente (3), y á su longitud la (4). Es importante observar los signos de las correcciones segun se tomen los azimutes al Oriente ó al Poniente. Serán, pues

Latitud correcta de B $L' + d L'$

Dif. cor. de long. entre A y B..... $P' + d P'$

116. Descubramos ahora la variacion de un azimut cualquiera tomado desde el punto cuya posicion se desea rectificar. Sean, como antes, invariables los lados b c , y supongamos variable el azimut A en el triángulo BAC; $d A$ será su variacion, $d B$ la del azimut de A tomado en B: veamos qué relacion tienen estas dos diferenciales. Es sabido que

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$

$$\sin c \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a}$$

Diferenciando la primera de estas ecuaciones, introduciendo el valor de $\sin c \cos B$, reduciendo un entero á quebrado, y substituyendo la unidad por $\sin^2 a + \cos^2 a$,

$$da \left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a} \right) + \sin a \sin c \sin B d B = 0.$$

Pero $\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a} = \sin b \cos C$, y $\sin c \sin B =$

$\sin b \sin C$; por consiguiente, substituyendo y dividiendo por $\sin b$,

$$da \cos C + d B \sin a \sin C = 0;$$

y como $da = d A \sin b \sin C$,

$$d B = - d A \times \frac{\sin b \cos C}{\sin a}$$

Esta es la variacion del azimut de A tomado en B con-

siguiente á la variacion del azimut de B tomado en A: y con las notaciones generales será.

$$dz' = \frac{\cos L \cos P'}{\cos L'} dz;$$

porque dA es dz , $\text{sen } b = \cos L$, $\text{sen } a = \cos L'$, y C es la diferencia P' de meridianos. En una triangulacion se determinan, como se ha dicho en otra parte, los azimutes de las diferentes estaciones por el primero z de la base: y cualquiera variacion de z hace girar todo el sistema de triángulos. En cualquiera estacion se puede aplicar la fórmula para corregir el azimut sin necesidad de haberla aplicado á los anteriores, bastando rectificar la latitud L' para introducir L : y en cuanto á los signos de dz , serán contrarios en el Oriente y en el Poniente del punto de partida. Si en virtud de la variacion B se coloca en B' , es claro que dz debe sumarse con z , y entonces

$$dz' = + \frac{\cos L \cos P'}{\cos L'} dz;$$

pero otro vértice b situado al poniente de AC en virtud de la variacion irá á b' , y el azimut b AC habrá tenido un decremento

$$dz' = - \frac{\cos L \cos P'}{\cos L'} dz.$$

Mr Puissant supone que todos los azimutes se toman al Poniente desde 0 hasta 360°.

117. Si en la ecuacion $\text{sen } b \text{ sen } C = \text{sen } B \text{ sen } c$ se suponen variables C, B , se tendrá

$$\cos C \, dC \text{ sen } b = \cos B \, dB \text{ sen } c,$$

$$d B = - \frac{d C \cos C \sin b}{\cos B \sin c}.$$

De este valor y del sacado en el artículo precedente se forma la ecuacion

$$\frac{d C \cos C \sin b}{\cos B \sin c} = - \frac{d A \sin b \cos C}{\sin a},$$

y de aquí la razon entre las variaciones del azimut de partida, y la de longitud de un vértice cualquiera de una cadena de triángulos,

$$\frac{d C}{d A} = - \frac{\sin c \cos B}{\sin a}.$$

118. Si las coordenadas latitud y longitud del punto principal de una carta geográfica tienen una pequeña correccion, ésta influirá necesariamente sobre las posiciones de los otros puntos: determinemos para cada uno de ellos el valor de esta influencia. Se echa de ver que aumentando la longitud absoluta λ del punto A una cantidad π esta propia cantidad aumentaria las longitudes de todos los puntos en el supuesto de que todas ellas fueran orientales, ó bien occidentales; porque si unas fueran al oriente y otras al poniente del meridiano principal, llevarian signos contrarios. En el triángulo BAC

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

ecuacion que diferenciada haciendo constantes c, A , proporciona

$$- \operatorname{sen} a \, da = - \operatorname{sen} b \, db \cos c + \cos b \, db \operatorname{sen} c \cos A;$$

poniendo por $\cos A$ su valor sacado de $\cos a$, haciendo multiplicaciones, quitando el quebrado, sacando factores y substituyendo 1 por $\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b$, resulta

$$\operatorname{sen} a \, da = db \left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} b} \right);$$

pero de la ecuacion $\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$ se despeja

$$\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} b} = \operatorname{sen} a \cos C,$$

y así substituyendo en $\operatorname{sen} a \, da$,

$$\operatorname{sen} a \, da = \operatorname{sen} a \cos C \, db,$$

$$da = db \cos C.$$

Tambien diferenciando $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A$, resulta

$$dC = - \frac{\cos a \, da \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} a \cos C},$$

y escribiendo por da su valor último,

$$dC = - \frac{db \operatorname{sen} C}{\operatorname{tang} a}.$$

Diferenciamos ahora la ecuacion

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B,$$

y consideremos que $\text{sen } c \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\text{sen } a}$,

que $\text{sen } c \text{ sen } B = \text{sen } b \overset{\text{den}}{\cos} C$, y que $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$;
llegaremos á obtener

$$-db = -da \left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\text{sen } a \text{ sen } b} \right) - \text{sen } a \text{ sen } C dB;$$

y como la cantidad entre paréntesis es $\cos C$, y $da = db \cos C$,

$$db = db \cos^2 C + \text{sen } a \text{ sen } C dB,$$

$$dB = db \frac{\text{sen } C}{\text{sen } a}.$$

Tenemos, pues

$$da = db \cos C,$$

$$dC = -db \frac{\text{sen } C}{\text{tang } a},$$

$$dB = db \frac{\text{sen } C}{\text{sen } a};$$

pero b es el complemento de la latitud L , a el de L' , C la diferencia de meridianos aproximada P' , y $dB = dz'$, y así las variaciones son

$$\text{En latitud, } dL' = dL \cos P',$$

$$\text{En longitud, } dP' = -dL \frac{\text{sen } P'}{\cot L},$$

$$\text{En azimut, } dz' = dL \frac{\text{sen } P'}{\cos L},$$

Los signos + de dL y dz , y — de DP' espresan que la latitud y el azimut crece cuando disminuye la diferencia de meridianos, lo que se echa de ver en la figura. Resulta de todo que

Latitud correcta de B = $L' + dL'$

Long. absoluta correcta de B = $\lambda + \omega + P' - dP'$

Azimut sobre el horizonte de B = ... $z' + dz'$.

119. Examinemos, por último, el caso en que una cadena de triángulos se apoye sobre una base B que haya tenido una variacion espresada por dB , de modo que la base correcta sea $B + dB$: todos los lados de la cadena tendrán un aumento proporcional con el de la base, de modo que uno cualquiera de ellos K se multiplicará por $\frac{B + dB}{B}$;

porque $B : B + dB :: K : \left(\frac{B + dB}{B}\right) K$. El lado correc-

to se espresará por $K + dK = \left(\frac{B + dB}{B}\right) K$, y

$$\log (K + dK) = \log K + \log \left(\frac{B + dB}{B}\right);$$

$$B : K :: dB : dK,$$

$$dK = \frac{K dB}{B}$$

$$\log (K + dK) = \log K + \log \left(1 + \frac{dB}{B}\right)$$

$$= \log K + \frac{MdB}{B} - \frac{MdB^2}{2B^2} \dots\dots$$

Como la correccion δB es siempre muy pequeña basta tomar el primer término $\frac{\Delta \delta B}{B}$ de la serie.

120. Al formar la carta de un país podrá tener el geógrafo necesidad de servirse de las posiciones de tres puntos conocidos para situar un cuarto, pues no siempre es posible encadenar directamente todos los puntos por medio de la triangulación; entonces es menester apelar á cuantos arbitrios proporciona la geometría. Supongamos que siendo conocidos los puntos A, B, C, [fig. 31], se quiera determinar la posición de D, en donde está colocado el observador, y puede tomar los ángulos CDA, CDB iguales con β , α . Consideremos el cuadrilátero ACDB formado de dos triángulos ACD, CDB, en los cuales se deben determinar los ángulos en B y en A opuestos al lado común D C, para conocer despues los lados AD, DB. Llamemos x , y estos ángulos en A y en B, y formemos las ecuaciones

$$DC = \frac{b \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \beta}, \quad DC = \frac{a \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \alpha},$$

en donde b , a son lados del triángulo conocido ABC. De estas dos ecuaciones se hace

$$\frac{b \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \alpha},$$

$$b \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x = a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} y \dots [1]$$

Sea γ el ángulo ACB en el cuadrilátero, en donde valen 360° los cuatro ángulos, para que

$$y = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) - x;$$

y siendo conocidos α, β, γ , haremos para abreviar $360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = d$, y con esto

$$y = d - x.$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuacion [1], y trasladando,

$$b \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x - a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (d - x) = 0,$$

$$b \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x - a \operatorname{sen} \beta (\operatorname{sen} d \cos x - \operatorname{sen} x \cos d) = 0.$$

Haciendo la multiplicacion, y dividiendo por $\operatorname{sen} x$,

$$b \operatorname{sen} \alpha - a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} d \cot x + a \operatorname{sen} \beta \cos d = 0,$$

$$\cot x = \frac{b \operatorname{sen} \alpha + a \operatorname{sen} \beta \cos d}{a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} d}$$

pero $\frac{a \operatorname{sen} \beta \cos d}{a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} d} = \cot d$, luego

$$\cot x = \cot d + \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} d}:$$

multiplicando y dividiendo el segundo término del segundo miembro por $\frac{\cos}{\operatorname{sen}} = \cot$, y sacando el factor comun,

$$\cot x = \cot d \left(1 + \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta \cos d} \right).$$

Por una consecuencia de analogía inferiremos

$$\cot y = \cot d \left(1 - \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha \cos d} \right),$$

lo que puede verificarse substituyendo en la ecuacion [1] $\text{sen } (d - y)$ por $\text{sen } x$, cuya equivalencia resulta de $y = d - x$, y despejando despues. Ahora teniendo en los triángulos ADC, CDB los ángulos α, β, x, y , y los lados a, b , se determinarán los lados AD, DB, con lo cual se tendrán ya todos los elementos de un nuevo triángulo ABD para agregarlo á una cadena.

121. Cuando no se quiera hacer uso de estas fórmulas se puede aplicar al propio caso una resolucion del todo geométrica. Tracemos una circunferencia por los tres vértices A, D, B, prolonguemos DC hasta E, y llevemos las líneas AE, EB: en el triángulo ABE se tendrán conocidos $EAB = EDB = \alpha$, $EBA = EDA = \beta$, y el lado AB del triángulo ABC; se podrán determinar los lados AE, BE. En BEC se conocen BC, BE, y el ángulo $EBC = \beta - CBA$, con cuyos datos se calcula el ángulo CEB; y así en el triángulo DBE en donde son conocidos α, E , y el lado BE se pueden determinar DB, DE, y el ángulo DBE que proporcionará conocer á y . Del propio modo se llegará al valor de x en el triángulo ADE, y del lado AD. Así quedará determinado el nuevo triángulo ABD.

122. Si un triángulo ABC [fig. 32], forma parte de una cadena, y un observador en D descubre dos de sus vértices A, C, puede determinar el nuevo triángulo ACD; y por consiguiente la posicion del punto D. Observando con la posible exactitud los azimutes de los puntos A, C, ó los ángulos $ADN = DAS'$, $NDC = DCS$ tendrá lo necesario para resolver el problema; porque el ángulo $CAD = 180^\circ - z - BAC - DAS'$, $ACD = 180^\circ - z' - BCA - DCS$. Con estos ángulos, y con el lado AC se pueden determinar AD, DC, y el ángulo D. Ahora en el triángulo rectángulo DEC se conocen DC y DCE

para calcular el valor de DE, diferencia de longitudes de los puntos C, D; y EC, diferencia de latitudes: los lados DE, EC se deben reducir á segundos con el valor del ángulo central que corresponde al país. Así se calcularán las coordenadas de muchos puntos que no se pueden encaenar directamente con una triangulacion. Este método, aunque no tiene toda la exactitud geodésica por suponer los meridianos paralelos, conviene seguir en México para la formacion de su carta general; pues los grandes despoblados y su vasta estension no permiten por ahora unos trabajos tan minuciosos y exactos como los aplicados á la formacion de la nueva carta de Francia. Podrian hacerse algunas triangulaciones para apoyar sobre triángulos bien determinados los otros formados como ahora se ha dicho.

123. Cuando no se quiera resolver el triángulo ACD para determinar las coordenadas del punto D, se puede situar este gráficamente. Habiendo tomado con el teodolito el azimut NDA se formará en A con el trasportador el ángulo $S'AD = NDA$ sobre la carta, y se llevará la línea AD indefinida: tambien en C se hará $SCD = NDC$, y la línea CD encontrará á la AD en D, cuyo punto quedará situado. Este problema ocurre frecuentemente en la práctica; y para su resolucion es menester haber determinado con la posible exactitud la declinacion de la aguja del teodolito en el país donde se opera.

124. Pero muchas veces se llega á un puesto cuya situacion no permite descubrir otros dos de posiciones conocidas: en este caso se procura descubrir uno; y con su azimut, y la latitud del lugar donde se halla el geógrafo, determinada por alturas de algun astro tomadas con el sextante, se puede dar á dicho lugar la situacion que le

corresponde en la carta. Supóngase situado el observador en O, [fig. 33], habiendo determinado la latitud de este punto, así como el azimut $M'OP$: tirando en la carta una línea indefinida OM que represente el paralelo de la latitud de O; y haciendo en P, punto ya situado y observado desde O, un ángulo $OPM = M'OP$, la línea PO cortará en O al paralelo, determinando la posición del lugar del observador. En la resolución de estos dos últimos problemas se comete el error de suponer plana la superficie de la tierra; pero esto no debe embarazar á los ingenieros, debiendo estar persuadidos de que es necesario levantar la carta de la república sirviéndose de estos métodos sencillos, y de que pasarán muchos años para que lleguen á corregirse las posiciones por los métodos exactos de geodesia. Hasta estos últimos tiempos se ha corregido la carta de Francia levantada por Cassini.

125. Aunque el mejor medio de hacer una buena triangulación es apoyarla sobre bases medidas con todas las circunstancias que se han dicho en este tratado, hay sin embargo casos en que no pudiéndose medir las tales bases conviene calcular alguna para dar principio á las operaciones. Un particular trabajando por su cuenta no podrá satisfacer todos los gastos que origina la medición de una ó dos grandes bases, ni tendrá á su disposición todos los instrumentos y útiles que requiere este trabajo. Pero con un sextante, un teodolito aunque sea de los comunes, y un cronómetro ejecutará operaciones demasiado apreciables en países donde no se puede hacer otra cosa. Resolveremos, pues, el siguiente problema: *Dadas las coordenadas geográficas de dos puntos en la superficie de la tierra determinar la línea geodésica, ó sea la mas corta distancia entre ambos puntos, reducida al nivel del mar.* Una

vez determinada esta línea ella servirá de base para hacer una red de triángulos, y para calcular despues de resueltos las coordenadas de todos los vértices.

126. Supongamos que AB , [fig. 26] sea la línea que junta las dos estaciones A , B , cuyas coordenadas son conocidas. AP , BP serán las colatitudes de dichas estaciones, $PAB = z$ el azimut ó suplemento del azimut de B , y el ángulo P la diferencia de longitudes. En el triángulo esférico $p a b$ se verifica, [art. 110].

$$\phi \operatorname{sen} z = P \cos L';$$

$$\phi = \frac{P \cos L'}{\operatorname{sen} z}$$

$$\phi^2 = \frac{P^2 \cos^2 L'}{\operatorname{sen}^2 z},$$

siendo ϕ el arco $a b$ espresado en segundos. La ecuacion [1], [art. 109], se puede poner en esta forma

$$L - L' = \phi \cos z (1 + e^2 \cos^2 L) + \frac{1}{2} \phi^2 \operatorname{sen}^2 z \operatorname{tang} L \operatorname{sen} l'' (1 + e^2 \cos^2 L),$$

ó introduciendo el valor ϕ^2

$$L - L' = \phi \cos z (1 + e^2 \cos^2 L) + \frac{1}{2} P^2 \cos^2 L' \operatorname{tang} L \operatorname{sen} l'' (1 + e^2 \cos^2 L);$$

y de aquí trasladando

$$\phi \cos z = \frac{L - L' - \frac{1}{2} P^2 \cos^2 L' \operatorname{tang} L \operatorname{sen} l'' (1 + e^2 \cos^2 L)}{1 + e^2 \cos^2 L};$$

dividiendo la primera ecuación $\phi \operatorname{sen} z$ por esta última,

$$\operatorname{tang} z = \frac{P \cos L' [1 + e^2 \cos^2 L]}{L - L' - \frac{1}{2} P^2 \cos^2 L' \operatorname{tang} L \operatorname{sen} l'' [1 + e^2 \cos^2 L]}.$$

Si llamamos K la distancia AB , y N la normal de la estacion A , $1 : \phi :: N : K = N_{\phi}$; pero $\phi = \frac{P \cos L'}{\sin z}$, luego $N_{\phi} = \frac{N P \cos L'}{\sin z}$; y como P es un arco muy pequeño lo reduciremos á segundos multiplicándolo por $\sin 1''$, y entonces

$$K = \frac{N P \cos L' \sin 1''}{\sin z}$$

Se calculará primero el ángulo auxiliar z por la fórmula $\tan z$, y se introducirá su valor en la de K .

127. Determinemos por ejemplo la línea geodésica del Colegio de Minería al cerro de Chiconautla, cuya posicion es conocida por la triangulacion del Sr. Velazquez.

Latitud del colegio.....	19° 25' 47" = L'
Latitud del creston de	
Chiconautla	19° 38' 39" = L
	<hr/>
	12' 52" = $L - L'$
Diferencia de longitu-	
des de los dos puntos	9 30 = $P = 570''$
Latitud media.....	19° 32' 13
$e^2 =$	0, 00 648
Normal á esta latitud,	
$N =$	6.379.313 ^m , $\log = 6,8047739$
Log. P	2,7558749
$\log \cos L'$	9,9745348
$\log (1 + e^2 \cos^2 L)$	0,0024900
	<hr/>
Numerador, $\log$	2,7328997
	<hr/>

Log $\frac{1}{2}$	9,6989700
2 log P.....	5,5117498
log $\cos^2 L'$	9,9490696
log tang L.....	9,5526108
log $(1 + e^2 \cos^2 L)$	0,0024900
log sen 1".....	4,6855749

$$0,25', \log..... 9,4004651$$

$$L - L' - 0'25 = 12' 51'',75 = 771'',75$$

$$\text{Com. log } 771'',75..... 7,1125234$$

$$\log. \text{ numerador}..... 2,7328997$$

$$z = 35^\circ 00'.43''8, \log.. 9,8454231$$

$$\text{Log N}..... 6,8047739$$

$$\log P..... 2,7558749$$

$$\log \cos L'..... 9,9745348$$

$$\log \text{ sen } 1''..... 4,6855749$$

$$\text{comp. log sen } z..... 0,2412770$$

$$K = 28976 \text{ metros, log } 4,4620355$$

Es, pues, la distancia K, reducida al nivel del mar, del Colegio de Minería al ereston del cerro de Chiconautla de 28976 metros, ó 34577,5 varas.

Que sirva de ejercicio otro ejemplo. La hacienda de Buenavista al suroeste de México tiene..... $19^\circ 20' 38''$ de latitud, y el colegio de Minería $19^\circ 25' 47''$: la diferencia de longitudes es de $7' 35''$. Suponiendo el mismo aplanamiento polar que en el ejemplo anterior resulta $K = 16322 \text{ metros} = 19477,3 \text{ varas}$.

CAPITULO VII.

De las nivelaciones por distancias zenitales.

128. Habiendo establecido ya las fórmulas para calcular las coordenadas geográficas de los diferentes puntos de una cadena de triángulos, falta determinar las líneas verticales para espresar con toda claridad la posición de dichos puntos en la superficie de la tierra. Esta indagación nos conduce naturalmente al método de nivelaciones geodésicas; puesto que una vez conocida la distancia de cualquier punto al centro de la tierra, solo faltará conocer las diferencias de nivel de los otros puntos respecto del primero para determinar sus líneas verticales. Recordaremos que dos puntos tienen un mismo nivel cuando son iguales sus líneas verticales, ó sus distancias al centro del globo; y cuando no es así, la diferencia entre ellas es la

diferencia de nivel de dichos puntos sobre la superficie terrestre. Todo cuanto tenemos que hacer sobre este asunto se reduce á la resolucion del problema siguiente: *conocida la altura de una estacion sobre un nivel constante, que será el del mar, determinar la de otra estacion.* En este capítulo resolveremos el problema sirviéndonos de una distancia zenital, ó de dos distancias simultáneas y recíprocas.

129. Sean M, O dos estaciones; (fig. 34), *mn* el nivel del mar, *Mm* la altura absoluta de M, *On* la de O; será ON la altura relativa de O sobre M, ó la diferencia de nivel = *x* que se quiera determinar. Colocado el observador en M medirá el ángulo OMP = *z*, que será la distancia zenital de O. En el triángulo OMN

$$\text{sen MON} : \text{MN} = K : : \text{sen OMN} : \text{ON} = x.$$

$$x = K \times \frac{\text{sen OMN}}{\text{sen O}}.$$

Por ahora supondremos á la cuerda K el mismo valor lineal que al arco *m n* conocido. Busquemos los valores de los ángulos del quebrado para hacer determinada la ecuacion: OMN = 180° — OMP — NMC; pero NMC = 90° — $\frac{1}{2}$ C por ser NMC y $\frac{1}{2}$ C complemento uno de otro, luego

$$\text{OMN} = 90^\circ - (z - \frac{1}{2} C)$$

$$\text{sen} (90^\circ - (z - \frac{1}{2} C)) = \cos (z - \frac{1}{2} C)$$

$$\text{sen OMN} = \cos (z - \frac{1}{2} C).$$

El denominador MON = OMD = *z* — PMD, y como PMD = C

$$O = z - C,$$

$$\text{sen } O = \text{sen } (z - C).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion de x ,

$$x = K \times \frac{\cos (z - \frac{1}{2} C)}{\text{sen } (z - C)}.$$

130. Esta fórmula daría exactamente la difencia de nivel entre dos puntos si al tomar la distancia zenital OMP no se cometiera el error que produce la refraccion, haciendo parecer el objeto O mas alto de lo que está realmente; y así, el ángulo observado OMP es menor que la verdadera distancia zenital una cantidad r , que se puede espresar por el pequeño ángulo iMO aditivo á la distancia observada iMP. Haciendo la correccion se tendrá el ángulo

$$OMN = 90^\circ - (z + r) - \frac{1}{2} C,$$

y tambien

$$O = z + r - C;$$

y la ecuacion del artículo anterior,

$$x = K \times \frac{\cos (z + r - \frac{1}{2} C)}{\text{sen } (z + r - C)} \dots \dots (1)$$

131: Falta ahora determinar la refraccion r , que es la única desconocida en el segundo miembro. Para esto se necesitan dos distancias zenitales simultáneas y recíprocas. Si un observador en M, mide la de O, que es $OMP = z + r$, al mismo tiempo que otro en O mide la de M, esto es, $MOZ = z' + r$: se tendrá

$$OMP + MOZ = z + z' + 2r.$$

Pero estos dos ángulos son esternos al triángulo OMC, y por tanto

$$\text{OMP} = \text{O} + \text{C},$$

$$\text{MOZ} = \text{OMC} + \text{C},$$

$$\text{OMP} + \text{MOZ} = \text{O} + \text{C} + \text{OMC} + \text{C};$$

y como $\text{OMP} + \text{MOZ} = z + z' + 2r$, y $\text{O} + \text{C} + \text{OMC} = 180^\circ$,

$$z + z' + 2r = 180^\circ + \text{C},$$

$$r = \frac{1}{2}(180^\circ + \text{C} - z - z').$$

132. Si por medio de esta fórmula se calculan muchos valores de r con el objeto de obtener un resultado medio numérico, y este se divide por el ángulo central C, que es representado por el arco terrestre en segundos, se espresarán los resultados diferente por esta ecuacion general

$$\frac{r}{\text{C}} = m$$

$$r = m \text{ C}.$$

La cantidad m se llama el *coeficiente de la refraccion*. De la multitud de operaciones que han hecho los sabios resulta para m un valor variable, como lo es la refraccion, para las diferentes circunstancias meteorológicas de la atmósfera; pero las mas veces $m = 0,08$ con una variacion de 0,02 en *menos* durante el estío, y la misma cantidad en *mas* en los dias nebulosos del invierno. Así, cuando no se haya determinado r directamente conviene usar el coeficiente 0,08; de modo que

$$r = 0,08 \text{ C}.$$

Parce lo mas seguro, euando se trata de calcular las alturas de los vértices de una cadena de triángulos, determinar con la posible exactitud el coeficiente por las distancias simultáneas y recíprocas de las dos primeras estaciones, sirviéndose de la fórmula $r = \frac{1}{2} (180^\circ + C - z - z')$, y aplicarlo á las otras mientras no haya mudanzas considerables en la atmósfera: y euando no se puedan tomar las distancias al mismo tiempo, bastrá que se tomen en un mismo dia, ó en circunstancias de la atmósfera semejantes.

133. Una vez conocida la refraccion no habrá dificultad para calcular x por la fórmula (1), en caso de que el valor de K sea muy grande; porque en los casos comunes en que esta cantidad se proporciona al buen alcance de los anteojos, se puede llamar tan pequeña respecto al radio terrestre, que no proviene error considerable sustituyendo por C su mitad en el denominador de la fórmula; y entonces escribiendo cotangente en lugar de $\frac{\text{coseno}}{\text{seno}}$,

$$x = K \times \cot (z + r - \frac{1}{2} C) \dots\dots (2)$$

134. Pongamos á la vista la fórmula (1) para darle una trasformacion:

$$x = K \times \frac{\cos (z + r - \frac{1}{2} C)}{\text{sen } (z + r - C)}$$

Escribiendo $m C$ por r

$$x = K \times \frac{\cos (z + m C - \frac{1}{2} C)}{\text{sen } (z + m C - C)} = K \times \frac{\cos \{z - (\frac{1}{2} - m) C\}}{\text{sen } \{z - (\frac{1}{2} - m) C - \frac{1}{2} C\}}$$

y haciendo $z = (\frac{1}{2} - m) C = u$

$$x = \frac{K \cos u}{\sin(u - \frac{1}{2} C)} = \frac{K \cos u}{\sin u \cos \frac{1}{2} C - \sin \frac{1}{2} C \cos u},$$

dividiendo numerador y denominador por $\sin u \cos \frac{1}{2} C$

$$x = \frac{K \cot u}{\cos \frac{1}{2} C (1 - \cot u \tan \frac{1}{2} C)},$$

subiendo el binomio del denominador, formando la potencia hasta el primer orden porque $\cot u$ es muy pequeña y lo mismo $\tan \frac{1}{2} C$, y tomando solo el primer término del producto,

$$x = \frac{K}{\cos \frac{1}{2} C} \times \cot u = \frac{K}{\cos \frac{1}{2} C} \times \cot \{ z - (\frac{1}{2} - m) C \},$$

habiendo restituido el valor de u . Sustituyamos $\frac{1}{\tan}$ por $\cot$, multipliquemos todos los términos por $\cot z$, y reduzcamos para obtener

$$x = \frac{K}{\cos \frac{1}{2} C} \times \frac{\cot z + \tan(\frac{1}{2} - m) C}{1 - \cot z \tan(\frac{1}{2} - m) C}.$$

Subiendo el denominador del segundo período, formando la potencia — 1 hasta el segundo término, escribiendo $(\frac{1}{2} - m) C$ en lugar de su seno, multiplicando, despreciando el término de tercer orden, y sustituyendo cosec^2 en lugar de $\cot^2 + 1$, se tiene

$$x = \frac{K}{\cos \frac{1}{2} C} \times \left\{ \cot z + (\frac{1}{2} - m) C \operatorname{cosec}^2 z \right\}.$$

Pero K es la cuerda de un arco que mide el ángulo central, y es igual con $2R \operatorname{sen} \frac{1}{2} C$, ó por ser muy pequeño C, $K = RC$, $C = \frac{K}{R}$; por tanto

$$x = \frac{K}{\cos \frac{1}{2} C} \left\{ \cot z + \left(\frac{1}{2} - m \right) \frac{K}{R} \operatorname{cosec}^2 z \right\}$$

y como $\operatorname{cosec}^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2}$,

$$x = \frac{K \cot z}{\cos \frac{1}{2} C} + \frac{K^2 \left(\frac{1}{2} - m \right)}{R \cos \frac{1}{2} C \operatorname{sen}^2 z};$$

haciendo por último $\cos \frac{1}{2} C = 1$, $\operatorname{sen}^2 z = 1$,

$$x = K \cot z + \frac{K^2}{R} \left(\frac{1}{2} - m \right) \dots\dots (3)$$

135. La suposicion de que la cuerda MN es igual con el arco mn al nivel del mar es admisible cuando se trabaja á cortas alturas sobre este nivel; pero no lo es en ~~partes~~ *países* muy elevados como los de México en donde Mm pasa de 2000 metros: y se echa de ver que cuanto mayor sea Mm tambien será mayor la diferencia entre cuerda MN y arco mn . Es, pues, necesario determinar el valor de K introduciendo el radio de la tierra. Como la línea geodésica MN está siempre reducida al nivel del mar, mn es una cantidad conocida. Sean $Mm = h$, arco $mn = \phi$, cuerda $mn = a$; se tiene

$$Cm : mbn :: CM : MBN,$$

$$R : a :: R + h : K ;$$

pero $\alpha = \phi - \frac{\phi^3}{24R^2}$, (art. 89), luego

$$K = \phi \left(1 + \frac{h}{R}\right) \left(1 - \frac{\phi^2}{24R^2}\right).$$

Para facilitar el cálculo por logaritmos de este valor se pueden formar las series de ambos binomios tomando los primeros términos, con lo cual, por la ecuacion de $\log(1+x)$

$$\log K = \log \phi + \log \left(1 + \frac{h}{R}\right) + \log \left(1 - \frac{\phi^2}{24R^2}\right),$$

$$\log K = \log \phi + \frac{Mh}{R} - \frac{M\phi^2}{24R^2} \dots\dots\dots (4)$$

En el paralelo de 20° , y con el aplanamiento 0,00324 se encuentran

Log R.....	6,8044506
log M, módulo.....	9,6377843
log $\frac{M}{R}$	2,8333337
log $\frac{M}{24R^2}$	4,6486718

136. Hasta ahora hemos resuelto el problema por una sola distancia zenital corregida por efecto de la refraccion, y este caso ocurre con mas frecuencia; pero habiendo proporcion de observar las dos distancias al mismo tiempo la diferencia de nivel resulta con mas exactitud, porque se anula la refraccion. En efecto, si en la ecuacion (1) se

introduce el valor de $r = \frac{1}{2} (180^\circ + C - z - z')$, resulta

$$x = K \times \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (z' - z)}{\cos \frac{1}{2} (z' - z + C)}; \dots\dots\dots (5)$$

y la ecuacion (2) se reduce á

$$x = K \times \operatorname{tang} \frac{1}{2} (z' - z);$$

ó substituyendo el pequeño arco $z' - z$ en segundos en lugar de la tangente,

$$x = \frac{1}{2} K (z' - z) \operatorname{sen.} 1'' \dots\dots\dots (6)$$

En estas dos últimas fórmulas ha desaparecido r , y por consiguiente tambien la incertidumbre de usar de un coeficiente de refraccion que tiene variaciones, aunque no sean tan grandes que alteren considerablemente la exactitud, como ya se ha dicho.

137. Reduciremos la fórmula (5) á mayor sencillez: hagamos para abreviar $\frac{1}{2} (z' - z) = v$, y substituyamos para obtener

$$x = \frac{K \operatorname{sen} v}{\cos (v + \frac{1}{2} C)}$$

Dividiendo ambos términos del quebrado por $\cos \frac{1}{2} C$, y substituyendo las líneas trigonométricas resultantes, se tiene

$$x = \frac{K \operatorname{tang} v}{\cos \frac{1}{2} C (1 - \operatorname{tang} v \operatorname{tang} \frac{1}{2} C)}.$$

Exaltando la potencia — 1 del binomio hasta el segundo término,

$$x = \frac{K \operatorname{tang} v}{\cos \frac{1}{2} C} (1 + \operatorname{tang} v \operatorname{tang} \frac{1}{2} C).$$

El segundo término de este binomio se desprecia las mas veces por ser muy pequeños los ángulos v , $\frac{1}{2} C$; por lo cual y restituyendo,

$$x = K \times \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (z' - z)}{\cos \frac{1}{2} C}.$$

138. No siempre puede un observador colocarse en el punto visual de una estacion para tomar la distancia zenital de otra: por ejemplo; cuando la de la cruz de un campanario el observador al llegar á esta estacion se coloca debajo del remate de la torre en su línea vertical, ó fuera de ella. Hay pues, necesidad de hacer aún otra correccion á las distancias zenitales. Si se supone una señal en C, [fig. 35], y que se haya de tomar la distancia zenital de otra señal A, no pudiendo el geógrafo colocarse en C, sino en O, medirá el ángulo $\text{AOZ} = z$ menor que ACZ una cantidad representada por el pequeño ángulo A. Llamaremos $\text{OC} = i$, $\text{AC} = K$; y en el triángulo AOC calcularemos

$$K : \operatorname{sen} z :: i : \operatorname{sen} A = \frac{i \operatorname{sen} z}{K}$$

luego la verdadera distancia zenital del punto A

$$\text{ZAC} = z + A = z + \frac{i \operatorname{sen} z}{K \operatorname{sen} 1''},$$

porque el ángulo A es siempre muy pequeño, y se puede tomar el arco por el seno.

139. Cuando no sea posible que el observador se coloque en la vertical de la estacion C elegirá un punto inmediato O' que esté en el plano vertical ZCA, y medirá el ángulo Z'O' A distancia zenital de la estacion A. Por la línea O'D paralela á CA se echa de ver que la verdadera distancia $ZCA = Z'O'D = Z'O'A + \Lambda O'D = z + \Lambda$; y para determinar Λ haremos en el triángulo CO'A

$$CO' : CA :: \text{sen } \Lambda : \text{sen } \Lambda O'C,$$

y de aquí se deduce

$$\begin{aligned} \text{sen } \Lambda &= \frac{CO' \times \text{sen } \Lambda O'C}{CA} \\ &= \frac{i \text{ sen } \Lambda O'C}{K} \end{aligned}$$

y como $\text{sen } \Lambda = \Lambda$ por lo dicho ántes

$$\Lambda = \frac{i \text{ sen } \Lambda O'C}{K \text{ sen } 1''}$$

Se supone que el observador en O' ha tomado la distancia zenital de C, esto es, CO'Z', y entonces el ángulo $\Lambda O'C = CO'Z' + z$. En estos dos casos es aditiva la correccion porque el observador está mas bajo que el punto visual de la estacion, seria substractiva en el caso contrario, como si el instrumento estuviera colocado sobre un poste cuyo extremo superior hubiera sido el punto de mira: aquí seria i la altura de dicho instrumento. Pueden ocurrir en la práctica algunos otros casos, cuando no sea posible colocarse el observador en el plano vertical de las estacio-

nes; pero entonces su ingenio sabrá resolverlos. Para terminar este artículo diremos que la fórmula $ZCA = z$

+ $\frac{i \text{ sen } z}{K \text{ sen } 1''}$ se reduce comunmente á

$$ZAC = z + \frac{i}{K \text{ sen } 1''}$$

atendiendo á que la distancia zenital z es poco diferente de 90° , y su seno $= 1$.

140. Si desde un punto O. se descubre el horizonte del mar en M, [fig. 36], se puede calcular la altura absoluta ON de dicho punto por medio de la distancia zenital MOZ. Como la tangente OM es perpendicular al radio CM, el triángulo CMO es rectángulo en M, y el ángulo $MOC = 90^\circ - C$; pero

$$MOZ = z + r, \text{ y tambien}$$

$$MOZ = 180^\circ - MOC = 90^\circ + C, \text{ luego}$$

$$z + r = 90^\circ + C.$$

Se tiene igualmente $CM = CO \times \cos C$. y siendo $ON = x$ y $CN = CM = R$,

$$CM = [x + CM] \cos C$$

$$x = CM \left(\frac{1 - \cos C}{\cos C} \right) = R \times \left(\frac{1 - \cos C}{\cos C} \right)$$

Hay ademas la ecuacion $1 - \cos C = 2 \text{ sen } \frac{1}{2} C$, y así

$$x = R \times \frac{2 \text{ sen } \frac{1}{2} C}{\cos C} = R \times \frac{2 \text{ sen } \frac{1}{2} C \text{ sen } C}{\cos C \text{ sen } C};$$

$$\text{y como } \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\operatorname{sen} C} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} C [i], \quad \frac{\operatorname{sen} C}{\cos C} = \operatorname{tang} C,$$

$$x = R \times \operatorname{tang} \frac{1}{2} C \operatorname{tang} C.$$

En general, cuando se tiene un producto $m x$ de un arco muy pequeño x por un coeficiente m que difiere poco de la unidad, se verifica $\operatorname{tang} m x = m \operatorname{tang} x$; por consiguiente, en nuestra ecuacion en donde $R \times \operatorname{tang} \frac{1}{2} C$ es el coeficiente de $\operatorname{tang} C$, se puede hacer la equivalencia

$$x = \frac{1}{2} R \operatorname{tang}^2 C.$$

En esta ecuacion es C cantidad indeterminada, que es menester eliminar por sustitucion. De $z + r = 90 + C$, substituyendo $m C$ por r ,

$$C = z + m C - 90^\circ,$$

$$C - m C = z - 90^\circ,$$

$$C (1 - m) = z - 90^\circ;$$

$$\text{y si } \operatorname{tang} C (1 - m) = \operatorname{tang} (z - 90^\circ), \operatorname{tang}^2 C = \frac{\operatorname{tang}^2 (z - 90^\circ)}{(1 - m)^2} \text{ y}$$

$$x = \frac{R}{2 (1 - m)^2} \times \operatorname{tang}^2 (z - 90^\circ):$$

(i) En efecto, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} C}$, y substituyendo por el denominador su valor $\frac{\operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$ sacado de la ecuacion... $\operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$, resulta $\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\operatorname{sen} C} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} C$.

subiendo el binomio $(1 - m)^2$, formando la potencia — 2 con dos términos, resulta finalmente

$$x = \frac{1}{2} R (1 + 2 m) \operatorname{tang}^2 (z - 90^\circ).$$

Esta fórmula, en la cual $z - 90^\circ$ se llama *depression del horizonte*, está calculada suponiendo que la refracción es la misma al nivel del mar que en el punto de estación cuya altura absoluta se trata de conocer; y aunque no tiene toda la exactitud posible por tal suposición, proporciona la suficiente en la mayor parte de los casos que pueden ocurrir en países que no tengan muy grande altura sobre el mar.

141. Cuando al hacer una triangulación no se conoce la altura absoluta de uno de los vértices, tampoco se podrán determinar las relativas de todas las estaciones; pero si en la cadena hay un punto desde el cual se descubre el mar, determinando por la última fórmula la altura de dicho punto, se aplicará después alguna de las otras fórmulas para determinar las diferencias de nivel de todos los vértices. La superficie del mar está sujeta á variaciones producidas por el flujo y reflujo; y así, se ha de tomar la depresión media entre la alta y la baja mareas para introducirla por $z - 90^\circ$ en nuestra fórmula, haciendo $m = 0,08$ como se ha dicho en este capítulo. Sin embargo, como en estas nivelaciones queda siempre una pequeña incertidumbre proveniente del coeficiente de la refracción, la cual se aumenta al tomar la depresión del horizonte del mar por los vapores de las aguas; se preferirá cuando sea posible una buena nivelación topográfica para determinar la altura absoluta de uno de los puntos de estación.

142. Que sirva para ejercicio el siguiente ejemplo. La distancia ϕ del observatorio del colegio de Minería á la hacienda de Buenavista al Suroeste de México es 16322 metros, y la distancia zenital de esta hacienda tomada desde el observatorio de $88^{\circ} 10' 15'' = z$; se quiere determinar la diferencia x de nivel entre ambos puntos, siendo la altura absoluta del observatorio de 2290 metros. Las fórmulas para este caso son:

$$\log K = \log \phi + \frac{Mh}{R} - \frac{M\phi^2}{24R^2}$$

$$x = K \cot z + \frac{K^2}{R} \left(\frac{1}{2} - m \right)$$

Calcularemos primero el valor de K para sustituirlo en la ecuacion de x :

$\phi = 16322^m \dots \dots \dots$	$\log. 4,2127888$	
$\log. \frac{M}{R} \text{ (art. 125)} \dots \dots \dots$	$2,8833337$	$+ \quad 1560 = \frac{Mh}{R}$
$h = 2290^m \dots \dots \dots \log \dots$	$3,5598355$	$\frac{4,2129448}{\dots}$
$0,0001560 \dots \dots \dots \log \dots$	$6,3931632$	$- \quad 1 = \frac{M\phi^2}{24R^2}$
		$4,129447 = \log. K.$
$\phi^2 \dots \dots \dots \log \dots$	$8,4255776$	$8,5012781 = \log. \cot. z.$
$\log. \frac{M}{24R^2} \text{ (art. 125)} \dots \dots \dots$	$4,6486718$	$2,7172228 = \log. 521,^{m}46.$
$0,0000001 \dots \dots \dots \log \dots$	$3,9712494$	
		$8,4253894 = \log K^2$
		$9,6232493 = \log. \left\{ \frac{1}{2} - 0,03 \right\}$
		$3,1995494 = \text{comp. log. } R$
		[art. 125].
$K \cot. z \dots \dots \dots$	$521,^{m}46$	
$\frac{K^2}{R} \left(\frac{1}{2} - m \right) \dots \dots \dots$	$1,^{m}73$	$1,2486881 = \log. 17,^{m}73.$
$x = \dots \dots \dots$	$523,19 \text{ metros.}$	

Es, pues, la diferencia de nivel entre ambos puntos 539 metros = 643,198 varas, habiendo tomado 0,08 por coeficiente de la refraccion. La altura de Buenavista sobre el mar es de $2290 + 539 = 2829$ metros = 3375,895 varas. En este ejemplo solo ha producido el tercer término de la ecuacion log. K una diezmillonésima que nada contribuye para alterar el valor de x ; y esto es lo común en las nivelaciones que se ofrecen. También se nota que para calcular log. K basta usar mantisas de cinco cifras.

CAPITULO VIII.

De las nivelaciones por medio del barómetro.

PARTE PRIMERA.

143. Si llamamos A la altura de la atmósfera contada desde el nivel del mar, y A' la que tiene desde un punto de la superficie de la tierra; la diferencia $A - A'$ espresará la altura absoluta de dicho punto sobre el nivel del mar: y si espresamos por x esta diferencia,

$$x = A - A'.$$

Por ahora supondremos que las dos estaciones están situadas en el ecuador á *cero* grados de latitud y temperatura. La dilatacion del aire por el calor no produciria alteracion alguna en esta ecuacion, si creciera ó menguara

la temperatura igualmente en ambas estaciones; pero esto sucede raras veces. Siendo iguales poco mas ó menos las latitudes y las circunstancias meteorológicas de la atmósfera, hay mas grados de temperatura en los lugares mas bajos, y es la mayor al nivel del mar.

145. Sea t la temperatura del aire en donde es A la altura de la atmósfera, y t' en la otra estacion, una y otra en grados del termómetro centesimal. Un volúmen de aire, siguiendo á Laplace, se dilata 0,00375 por cada grado de temperatura: y siendo A una columna muy delgada de la atmósfera, su volúmen tendrá un aumento espresado por $0,00375 A$, de modo que la columna aumentada será $A + 0,00375A$; pero

$$1^{\circ} : 0,00375A :: t : 0,00375At.$$

Así, en general, una columna de aire de altura A á *cero* grados, tendrá á la temperatura supuesta uniforme t la altura

$$A + 0,00375At = A(1 + 0,00375t):$$

y haciendo una correccion semejante á la otra columna A' ,

$$A'(1 + 0,00375t').$$

Considerando Laplace que la dilatacion 0,00375 conviene muy poco mas ó ménos al aire perfectamente seco, ealidad que no se puede atribuir al atmosférico que contiene siempre algun vapor de agua, que lo hace mas ligero específicamente; calcula que para llevar en cuenta el estado higrométrico de la atmósfera es menester subir la dilatacion á 0,004, y entonces

$$x = A (1 + 0,004t) - A' (1 + 0,004t'). \quad (j)$$

145. Las mayores alturas de la tierra respecto á los mares son muy pequeñas en comparacion con la que puede suponerse á la atmósfera, y por eso se atribuye á la capa de aire comprendida entre las dos estaciones inferior

y superior una temperatura media $\frac{t + t'}{2}$, ya que esta disminuye en progresion aritmética subiendo desde el

mar. Pero si $t + t' = s$, $\frac{t + t'}{2} = \frac{s}{2}$, $0,004 \frac{s}{2} = 0,002s$

por consiguiente

$$x = A (1 + 0,002s) - A' (1 + 0,002s)$$

$$= (A - A') (1 + 0,002s).$$

146. Si tuvieramos arbitrios para determinar la altura de la atmósfera en cualquier punto de la tierra, esta fórmula nos daría próximamente las diferencias de nivel; pero no habiéndolos hasta ahora, podemos averiguar la relacion que hay entre las alturas de las columnas de aire y las del mercurio en el barómetro cuando se equilibran unas con otras, y sustituir en esta ecuacion fundamental por $A - A'$ una cantidad equivalente que dependa de las co-

(j) La dilatacion del aire 0,00375 ha sufrido una correccion por los experimentos de MM. Pouillet y Regnault, quienes las reducen á 0,00367. Si á este número se agregan las 0,00025 que aumenta Laplace por efecto de la humedad resultan 0,00392 en lugar de 0,004: la diferencia es tan corta que no he querido variar el coeficiente 0,004, el cual tiene la ventaja de proporcionar sencillez á la fórmula.

lumnas barométricas b, b' . D'Ambuissou raciociua del mo-
do siguiente poco mas ó menos: consideremos la atmósfera
compuesta de capas horizontales de grueses muy peque-
ños pero iguales á fin de que se pueda suponer cada una
de ellas de uniforme densidad. Las alturas absolutas de
estas capas sobre el mar formarán una progresion aritmé-
tica de *cero* en el primer término, un grueso en el segun-
do, dos en el tercero, &c.; de modo que siendo x este
grueso,

$$\div 0 . x . 2x . 3x \dots, \text{ ó mejor}$$

$$\div 0 . x . x' . x'' \dots$$

Que espresé p el peso de una columna vertical de aire,
cuya altura sea la misma de la atmósfera; p' el de toda la
columna menos la primera capa; p'' el de toda la columna
menos las dos primeras capas, &c. Los pesos de cada una
de estas capas serán $p - p', p' - p'', p'' - p''' \dots$
y como las densidades son proporcionales á los pesos,

$$d : d' :: p - p' : p' - p''.$$

Tambien hay proporcion entre las densidades de las ca-
pas y los pesos comprimidos, y así

$$d : d' :: p' : p''.$$

De la comparacion de estas dos proporciones resulta

$$p - p' : p' - p'' :: p' : p''$$

$$p : p' :: p' : p''$$

$$\div p : p' : p'';$$

lo que demuestra que las presiones del aire, subiendo desde el mar disminuyen en progresion geométrica. Las columnas del barómetro miden dichas presiones, y así

$$\div b : b' : b'' : b''' \dots\dots,$$

$$\div \frac{1}{b} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{b''} : \frac{1}{b'''} :$$

y multiplicando por b todos los términos,

$$\div 1 : \frac{b}{b'} : \frac{b}{b''} : \frac{b}{b'''} \dots\dots$$

Comparemos ahora la progresion aritmética de los gruesos, ó llámense alturas, de las capas de aire con esta geométrica de las columnas del barómetro:

$$\div 0 . x . x' . x'',$$

$$\div 1 : \frac{b}{b'} : \frac{b}{b''} : \frac{b}{b'''}.$$

Desde luego se ve que los términos de la aritmética, que empieza en *cero*, corresponden á los de la geométrica cuyo primer término es 1; luego

$$x = \log. \frac{b}{b'} = \log. b - \log. b':$$

y siendo x la diferencia de las alturas de la atmósfera, ó el grueso de la capa de aire comprendida entre dos pun-

tos de la tierra á diferentes niveles, podremos sustituir su valor en lugar de $A - A'$ de la fórmula; y entonces

$$x = (\log. b - \log. b') (1 + 0,002s).$$

147. Este sistema de logaritmos que llamaremos *barométricos* necesita un módulo ó coeficiente, que supondremos C , para convertirlo en el tabular; de suerte que á *cerro* grados de latitud se determinaría la altura absoluta de un lugar por la ecuacion

$$x = C (\log b - \log b') (1 + 0,002 s)$$

y para conocer el valor numérico de C bastaría determinar x por operaciones geodésicas, las columnas del barómetro b, b' en las dos estaciones, y la temperatura de la atmósfera; porque entonces no quedaría en la ecuacion mas desconocida que C . Pero el cálculo proporciona medios mas expeditos.

148. Supongamos, esplicandoun pensamiento de D'Aubuisson, que la línea vertical como eje de abscisas se divide en partes iguales x , y que por los puntos de division se levanten ordenadas b, b', b'' de modo que las x sean logaritmos de las b : en el límite superior de la atmósfera serán $b = 0$, y la línea de las x subtangente en una curva logarítmica que pasará por los extremos de las ordenadas. Esta subtangente sería el módulo C igual con la altura de la atmósfera, la cual determinaremos en la suposicion de que sea uniforme el peso específico del aire en todas partes, ó igual á la unidad.

149. Una columna de aire se espresa por $A \times B \times 1$, esto es, el producto de altura, base y peso específico; y la

del mercurio, que se equilibra con ella en el límite inferior de la atmósfera, por $b \times B \times p$. Pero las bases de ambas columnas han de ser iguales, y así

$$A = b \times p.$$

Llamamos p el peso específico del mercurio en el ecuador, y p' en otro lugar de latitud L . A los 45° bajo la presión $b = 760$ milímetros, y á cero de temperatura pesa el mercurio, segun MM. Biot y Arago, 10467 veces mas que el aire; luego

$$A = 760 \text{ mil.} \times 10467 = 7954,92 \text{ metros}$$

seria la altura de la columna pesada de la atmósfera. Si usáramos logaritmos naturales para calcular la fórmula, esta altura seria el módulo para hacerlos barométricos; pero debiendo usar de los vulgares tendremos que dividirla por 0,4343, de modo que

$$C' = \frac{A'}{M} = \frac{7954,920}{0,4343} = 18317 \text{ metros.}$$

La espresion general para cualquier punto de la tierra $C' = \frac{A'}{M}$ manifiesta que el coeficiente de la fórmula barométrica es el cociente de la altura de la columna de aire supuesta de una densidad constante espresada por la unidad, dividida por el módulo de los logaritmos tabulares.

150. Una vez explicado el pensamiento de D'Aubuisson reflexionemos que no siendo esférica la tierra sino elipsoide de revolucion, en cuyo supuesto hemos determinado sus dimensiones en el capítulo primero, varian las

distancias al centro de atraccion en las diferentes latitudes; y los pesos específicos del mercurio, siendo el del aire 1, y en igualdad de volúmenes, están en razon inversa de los cuadrados de las distancias á dicho centro, ya que son directamente como las gravedades absolutas. Sean como antes a al radio del ecuador y N la grande normal de un punto cualquiera de la tierra de latitud L : llamado p el peso del mercurio en el ecuador se tendrá

$$p : p' :: N^2 : a^2.$$

En el capítulo primero de este tratado consta que

$$N^2 = \frac{a^2}{1 - e^2 \sen^2 L},$$

en donde e^2 es el doble del aplanamiento polar. Sustituyendo este valor de N^2 en la proporcion,

$$p : p' :: \frac{a^2}{1 - e^2 \sen^2 L} : a^2 :: 1 : 1 - e^2 \sen^2 L,$$

de donde se infiere

$$p = \frac{p'}{1 - e^2 \sen^2 L}.$$

Así, una vez conocido el peso p' á una latitud L , se tendrá p para el ecuador dividiendo el primero por la fraccion decimal $1 - e^2 \sen^2 L$.

151. Para calcular p supongo el aplanamiento $\alpha = \frac{1}{185}$ que ademas de espresar próximamente el aumento de la pesantez del ecuador á los polos se acerca mucho al que

resulta de las medidas practicadas por Delambre y Mechain en el suelo de Francia hasta Barcelona, y por La Caille en el cabo de Buena Esperanza. De las primeras

deduce Mr. Puissant que $\frac{1}{180}$ es el aplanamiento del elipsoide osculador á la superficie de Francia, y el grado de La Caille comparado con el de Bouguer y La Condamine en el ecuador, da tambien $\frac{1}{180}$. Será, pues, $e^2 = 2a =$

$\frac{2}{185}$, y á 45° de latitud en donde $\text{sen}^2 L = \frac{1}{2} e^2 \text{sen}^2 L = \frac{1}{185} = 0,0054$; pero á esta latitud y á *cero* de temperatura $p' = 10467$, luego

$$p = \frac{p'}{1 - e^2 \text{sen}^2 L} = \frac{10467}{1 - 0,0054} = 10524.$$

Esto quiere decir que á *cero* de latitud y temperatura, y á 760 milímetros de presion atmosférica pesaria el mercurio 10524 veces mas que el aire. La altura de la columna $= 10524 \times 760$ milímetros $= 7998,240$ metros; y el coeficiente $C = \frac{A}{M} = \frac{7998,240}{0,4343} = 18416$ metros.

152. De la ecuacion $p = \frac{p'}{1 - e^2 \text{sen}^2 L}$ se despeja

$$e^2 = \frac{p - p'}{p \text{sen}^2 L},$$

lo que demuestra que una vez conocido el peso específico del mercurio por esperimentos directos en dos lugares de

latitudes diferentes, se podria determinar la excentricidad del elipsoide terrestre, y de ella deducir el aplanamiento de los polos. Ya que $e^2 = 2a$, sustituyendo en la última ecuacion se tendrá la cantidad de aplanamiento por

$$a = \frac{p - p'}{2 p \operatorname{sen}^2 L}.$$

Supongamos que por medio de experimentos se hubiera determinado en el ecuador á 760 milímetros de presión y á *cero* de temperatura $p = 10512,7$. El numerador podria ser $p - p' = 10512,7 - 10467 = 45,7$; y el denominador $2 p \operatorname{sen}^2 L = p$ porque se trata de 45° de latitud: en esto supuesto

$$a = \frac{45,7}{10512,7} = 0,004347 = \frac{1}{230}.$$

153. De lo dicho antes se infiere que

$$C : C' :: \frac{\Lambda}{M} : \frac{\Lambda'}{M} :: \frac{bp}{M} : \frac{bp'}{M} :: p : p'$$

$$C' = C \times \frac{p'}{p}.$$

Esta ecuacion da el coeficiente de la fórmula barométrica para cualquier punto de la tierra en donde sea p' el peso específico del mercurio; pero se puede hacer mas sencilla poniendo por el coeiente $\frac{p'}{p}$ su valor $1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L$, con lo que

$$C' = C (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L).$$

A los 20° de latitud $1 - e^2 \sin^2 L = 0,998735$, y así.

$$C' = 18416 \times 0,998735 = 18393 \text{ metros.}$$

Para no calcular en cada observacion barométrica el valor de C' , y para dejar la fórmula con toda la sencillez posible, se lleva pegada á la armadura del barómetro, ó en el libro manual la siguiente tabla de dicho valor para cada uno de los grados de latitud, ó solo se llevan los coeficientes que correspondan al país donde se trabaja.

TABLA DE LOS VALORES DEL COEFICIENTE BAROMÉTRICO A DIFERENTES LATITUDES.

L	C'	L	C'	L	C'
0°	18416	23°	18386	46°	18313
1	18416	24	18383	47	18309
2	18416	25	18381	48	18306
3	18416	26	18378	49	18302
4	18415	27	18375	50	18299
5	18415	28	18372	51	18296
6	18414	29	18369	52	18293
7	18413	30	18366	53	18290
8	18412	31	18363	54	18286
9	18411	32	18360	55	18283
10	18410	33	18357	56	18279
11	18409	34	18354	57	18276
12	18407	35	18351	58	18273
13	18406	36	18347	59	18269
14	18404	37	18344	60	18266
15	18403	38	18341	61	18263
16	18401	39	18338	62	18260
17	18399	40	18334	63	18257
18	18397	41	18331	64	18255
19	18395	42	18327	65	18252
20	18393	43	18324	66	18249
21	18391	44	18320	67	18247
22	18388	45	18317	68	18244

En los polos $C' = 18217$, y un medio aritmético entre este y el del ecuador 18416 es puntualmente el que conviene á 45° , esto es 18317.

153. Tambien se determinará C' del modo siguiente: ya que el mercurio pesa á 45° de latitud 10467 veces mas que el aire supondremos dividida la columna atmosférica en capas muy delgadas de 0,10467 metros. Colocando el barómetro en la parte superior de la primera capa allí indicaria 760 milímetros ó 76000 cienmilímetros; y bajándolo á la inferior tendria un pequeño aumento la columna de mercurio por la diferencia de nivel de 0,10467 de metro, y este aumento lo da la ecuacion $A = bp'$, (art. 149). En efecto $A = 0,^{m}10467$ en nuestro ejemplo, y la desconocida $b = \frac{A}{p'} = \frac{0,10467}{10467} = 0,00001$. Así, en la capa de aire de 0,^{m}10467 de grueso indicará el barómetro 76001 cienmilímetros: la diferencia de nivel se tendria por la ecuacion

$$x = C' (\log b - \log b')$$

y de aquí despejando y substituyendo

$$C' = \frac{0,^{m}10461}{\log 76001 - \log 76000}$$

Log 76601....., ,88081930

Log 76000 , ,88081359

Diferencia....., ,00000571;

$$\frac{0,10467}{0,00000571} = 18319 \text{ metros} = C'.$$

154. Laplace adopta el coeficiente 18336 para el paralelo de 50° de latitud, resultado de muchas comparaciones que hizo Ramond entre medidas barométricas y trigonométricas; y á fin de hacerlo constante para toda la tierra introduce en su fórmula el factor $1 + 0,002845 \cos 2L$. Pero además de complicar la fórmula tiene este factor el inconveniente de variar uno de sus signos, porque de 45° adelante $\cos 2L$ es negativo. Mr. Puissant en su Geodesia adopta la fórmula de Laplace, y para darle sencillez se conforma con la opinion de Ramond de hacer $C' = 18393$ y prescindir de los efectos de la pesantez tanto en latitud como en la vertical. D'Aubuisson introduce como Laplace el factor de la latitud, y admite $C' = 18365$ agregando 48 metros al coeficiente teórico, que él calcula de 18317, por efecto de la variacion de pesantez en la línea vertical. Otros autores usan el coeficiente de Ramond con algunas alteraciones; pero todos lo suponen constante, lo que no puede menos que causar inexactitudes en los cálculos.

155. La tabla de los valores de C' evita la introduccion en la fórmula del factor $1 - e^2 \sin^2 L$ como ya se ha dicho; pero quedan dos correcciones que es necesario hacer: la primera es por efecto de la dilatacion del mercurio, y la segunda por la variacion que debe tener el coeficiente á diferentes alturas relativa á la variacion de la pesantez. Si en las dos estaciones se tuviera siempre igual temperatura serian iguales las dilataciones del mercurio en las dos columnas barométricas, é innecesaria la correccion; pero habiendo comunmente mas calor en los lugares mas cercanos al nivel del mar la columna b' está menos dilatada que la b . El mercurio aumenta 0,00018 de su volumen por cada grado del termómetro centeci-

mal (k), por lo que tomando la diferencia $T - T' = d$ de las dos temperaturas de los barómetros $0,00018d$ espresará la dilatacion que se ha de agregar á la columna b' para que estando igualmente dilatada que la b ambas puedan compararse exactamente. La columna corregida será, pues, $b' + 0,00018b'd = b'(1 + 0,00018d) = \beta$. Esta columna β es la que debe introducirse en la fórmula general.

156. Para hacer la segunda correccion consideremos que al determinar el valor de C uno de los elementos del cálculo ha sido el peso específico del mercurio al nivel del mar. Haciendo una observacion en lo alto de una montaña, allí será mayor dicho peso respecto al del aire en razon directa de los cuadrados de las distancias al centro de la tierra, pues que las fracciones $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p''}$ son recíprocamente como esos cuadrados. En la estacion inferior es la distancia al radio a del ecuador, y en la superior $a+x$. Por consiguiente, si p'' es el peso específico del mercurio en donde la distancia es $a+x$,

$$p : p'' :: a^2 : (a+x)^2 :: 1 : 1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2};$$

pero tambien.

$$p : p'' :: C : C'', \text{ luego}$$

$$C : C'' :: 1 : 1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2},$$

$$C'' = C \left(1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right)$$

(k) La dilatacion del mercurio por los espèrimientos de Lavoisier y Laplace es de $\frac{1}{5412} = 0,00018477$, y por los mas recientes de Petit y Dulong de $\frac{1}{5450} = 0,00018348$. Se ve que hasta las cienmilésimas van conformes los dos resultados.

despreciando la pequenísima fracción $\frac{x^2}{a^2}$ Y para no hacer este cálculo en cada observacion barométrica se substituyen por x diferentes alturas 1000, 2000, 3000..... metros, y por a su valor numérico, ó en su caso el que corresponda á la normal N segun la latitud. De este modo se obtiene un valor para C'' siempre mayor que el de C ó C' , y cuyo aumento es muy poco mas ó menos igual á 0,006 del valor aproximado de x ; de suerte que

$$C'' = C + \frac{6x}{1000}.$$

De aquí se deduce la siguiente regla: *Calcúlese el valor de x por la fórmula con el coeficiente que le corresponda segun la latitud del lugar de observacion; agréguese á dicho coeficiente seis milésimas de x , y con este aumento introdúzcase de nuevo en el cálculo para obtener el valor correcto de x .*

157. Solo falta para concluir esta primera parte de las nivelaciones barométricas hacer aplicaciones de mi fórmula, que sirvan para manifestar su exactitud y sencillez, y para que los estudiantes formen clara idea del método. Pongamos á la vista dicha fórmula

$$x = C' (\log. b - \log. \beta) (1 + 0,002 s).$$

En la cima del Chimborazo en los Andes, y al nivel del océano Pacífico hizo el Sr. de Humboldt las observaciones siguientes:

ESTACION INFERIOR.

ESTACION SUPERIOR.

$$\left. \begin{array}{l} b = 762 \text{ milímetros.} \\ t = 25^{\circ},3 \text{ temp. del aire} \\ T = 25,3 \text{ temp. del bar.} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b' = 377,275 \text{ milímetros.} \\ t' = -1^{\circ},6 \\ T' = 10 \end{array} \right\} L = 1^{\circ}45'.$$

$$s = b' (1 + 0,00018d) = 377,37 \cdot \left\{ 1 + 0,00018(25,3 - 10) \right\} = 378,31 \text{ mm.}$$

$$s = t + t' = 25^{\circ},3 - 1^{\circ},6 = 23^{\circ},7.$$

$$1 + 0,002s = 1,0474.$$

El coeficiente que corresponde á $1^{\circ}45'$ de latitud es por la tabla 18416 metros; por consiguiente

$$C' = 18416, \text{ logaritmo} \dots\dots\dots 4,26519$$

$$\text{Log. } 762 - \text{log. } 378, 3 = 0,3041, \text{ log} \dots\dots\dots 9,48302$$

$$1 + 0,002s = 1,0474, \text{ log} \dots\dots\dots 0,02011$$

$$\text{Valor aprox. } x = 5865,^m 7, \text{ log} \dots\dots\dots 3,76832$$

$$\frac{6x}{1000} = 35 \text{ metros.}$$

$$C'' = 18416 + 35 = 18451, \text{ log} \dots\dots\dots 4,26602$$

$$9,48302$$

$$2011$$

$$\text{Valor correcto } x = 5877,^m \text{ log} \dots\dots\dots 3,76915$$

Altura del Chimborazo por mi fórmula.. 5877 metros.

El Sr. de Humboldt calcula..... 5879

Mr. Puissant por la fórmula de Laplace. 5877

Mr. Biot por su método..... 5874,79

158. El mismo Sr. de Humboldt al nivel del Atlántico y en la altura de Quindien, en Nueva Granada, en la línea de division de las aguas que corren á uno y otro océano, obtuvo

ESTACION INFERIOR.

ESTACION SUPERIOR.

$$\left. \begin{array}{l} b = 762,944 \text{ milímetros.} \\ t = 25,^{\circ}3 \\ T = 25,3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b' = 509,818 \text{ milím.} \\ t' = 18^{\circ},75 \\ T' = 20^{\circ} \end{array} \right\} L = 5^{\circ}$$

$$\beta = 509,818 \times 1,00095 = 510,304 \text{ milímetros.}$$

$$s = 44^\circ,05; 1 + 0,002s = 1,0881$$

$$\text{Para } L = 5^\circ, C' = 18415, \log \dots \dots \dots 4,26517$$

$$\text{Log. } 762,944 - \log. 510,304 = 0,17466, \log \dots \dots 9,24219$$

$$1,0881, \log \dots \dots \dots 0,03667$$

$$\text{Valor aprox. } x = 3499,7; \log \dots \dots \dots 3,54403$$

$$\frac{6x}{1000} = 21$$

$$C'' = 18415 + 21 = 18436, \log \dots \dots \dots 4,26567$$

$$9,24219$$

$$3667$$

$$\text{Valor correcto } x = 3503,^m7; \log \dots \dots \dots 3,54453$$

Mr. Biot calcula $x = 3503,5$ metros.

Mr. Francoeur cita en su Geodesia las observaciones del viajero prusiano, que le dieron

ESTACION INFERIOR.

ESTACION SUPERIOR.

$$\left. \begin{array}{l} b = 763,15 \text{ milímetros.} \\ t = 25^\circ,3 \\ T = 25,3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b' = 600,95 \text{ milímet.} \\ t' = 21^\circ,3 \\ T' = 21,3 \end{array} \right\} L = 21^\circ$$

$$\beta = 763,15 \times 1,00072 = 601,383 \text{ milímetros.}$$

$$1 + 0,002s = 1,0932.$$

$$\text{Para } L = 21^\circ C' = 18391 \text{ metros; } \log \dots \dots \dots 4,26461$$

$$\text{Log. } 763,15 - \log. 601,383 = 0,10346; \log \dots \dots 9,01472$$

$$1,0932, \log \dots \dots \dots 0,03870$$

$$\text{Valor aprox. } x = 2080 \text{ metros; } \log \dots \dots \dots 3,31803$$

$$\frac{6x}{1000} = 12.$$

$$C'' = 18391 + 12 = 18403; \log \dots \dots \dots \begin{array}{r} 4,26489 \\ 9,01472 \\ 3870 \end{array}$$

Valor correcto $x = 2082,2$ metros; $\log \dots \dots \dots 3,31831$

El Sr. de Humboldt 2084

Mr. Francoeur 2084,5.

Esta es la altura absoluta de Guanajuato en la casa de Rul.

Con una tabla de diferencias logarítmicas, todo el cálculo se reducirá á simples multiplicaciones, en este ejemplo último.

$$x = 18403 \times 0.10346 \times 1,0932 = 2082 \text{ metros.}$$

160. La falta de exactitud que se nota algunas veces en las nivelaciones barométricas viene principalmente del factor producido por las temperaturas del aire. La suposición de que ellas decrecen en progresion aritmética, subiendo desde el mar, puede admitirse, cuando se hacen las observaciones en iguales circunstancias de la atmósfera, lo que no siempre se consigue si la distancia horizontal entre las dos estaciones es considerable. La mayor ó menor altura que tengan los termómetros respecto del suelo, un vientecillo que sople en una de las estaciones, los diversos grados de sombra, y aun la calidad de las rocas inmediatas por la reflexion de los rayos solares, &c., pueden causar variaciones en los termómetros, que no se deben atribuir á la capa de aire, y entonces el factor $1 + 0.002s$ es incorrecto. Todas estas reflexiones conducen á observar, en todo caso, la regla general de hacer

las observaciones comparativas á la menor distancia horizontal posible, simultáneas ó casi simultáneas, y con instrumentos bien conocidos. Si ademas de esto, se dejan los instrumentos al aire libre todo el tiempo necesario para que los barómetros lleguen despues de haber balanceado, á ponerse en perfecto equilibrio con las columnas de aire, y que los termómetros indiquen las verdaderas temperaturas, se puede asegurar que las alturas determinadas por medio del barómetro tendrán igual exactitud que por las mas escrupulosas operaciones geodésicas

PARTE SEGUNDA.

161. No siempre se pueden obtener observaciones comparativas de las dos estaciones. Cuando llega este caso muy comun á los viajeros y á los geólogos observadores se sigue para alcanzar un buen resultado el camino que trazaré con la posible sencillez y exactitud. Si se colocaran los instrumentos en una playa marítima sin lugar sombrío darian los termómetros falsas indicaciones, y valdria mas determinar las temperaturas por medio del cálculo. Al establecer la fórmula general se ha partido de la suposicion de ser la columna barométrica en el límite inferior de la atmósfera, y á *cero* de temperatura, de 760 milímetros: y tambien se puede suponer que cualquiera cantidad que exceda dicha columna á los 760 sea debida á la dilatacion del mercurio, pues de esto no resulta inconveniente alguno. Si es $b = 763$ milímetros los 3 medirán la dilatacion, que se espresará por $b - 760$; pero el mercurio se dilata 0,00018 de su volúmen por un grado del termómetro, y así .

$$b - 760 = 0,000018t \times 760 = 0,1368t,$$

$$t = \frac{10000}{1368} (b - 760) = 7,31 (b - 760).$$

Luego bastará conocer la columna b para determinar aproximativamente la temperatura del aire cuando ninguna circunstancia venga á turbar el equilibrio *normal* de la atmósfera. En el último ejemplo 3 mil. $\times 7,31 = 21,93$ sería la verdadera indicacion del termómetro para $b = 763$ milímetros. Y al contrario, cuando se conozca bien la temperatura del aire al nivel del mar se determina la columna b por la ecuacion

$$b = 760 (1 + 0,00018t).$$

Si fuera de 26° la temperatura media al nivel del mar allí sería.

$$b = 760 (1 + 0,00018 \times 26^\circ) = 763,56 \text{ milímetros.}$$

162. Ya hemos anunciado que muchas veces tiene un vigero la necesidad de suponer las indicaciones de los instrumentos en la estacion inferior para determinar con alguna aproximacion la altura absoluta de un lugar, y este es un inconveniente del método. Entonces para proceder con el acierto posible se considera que la mayor columna barométrica y la mayor temperatura, se tiene en el límite inferior de la atmósfera, y las menores en el superior. Esto nos debe inclinar á creer que las columnas del barómetro y las temperaturas del aire están en razon directa, ó que

$$b : b' :: t :: t',$$

$$bt' = b't, \frac{b}{b'} = \frac{t}{t'}.$$

Así, conociendo tres de estas cuatro cantidades se determinará inmediatamente la cuarta.

163. *Caso primero.* Si se conocen exactamente b' , t' se puede suponer $b = 762$ milímetros, y determinar t por la ecuacion $t = \frac{bt'}{b'}$. Debemos suponer que el Sr. de Humboldt tendria en Guanajuato el tiempo y las comodidades necesarias para observar con toda exactitud b' , t' ; por consiguiente, ya que $b = 762$, $t = \frac{762 \times 21,^{\circ}3}{600,95} = 27,^{\circ}08$, (véase art. 159), y los cuatro números correspondientes serán

$$\left. \begin{array}{l} b = 762 \text{ milím.} \\ t = 27,^{\circ}08 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} b' = 600,95 \\ t' = 21,^{\circ}3 \end{array} \right\} \quad \text{Con } L = 21,^{\circ}$$

Introduciendo en la fórmula b' por β se obtiene

$$\begin{array}{ll} \text{Para } L = 21,^{\circ} \text{ } C' = 18391; \log \dots\dots\dots & 4,26461 \\ \text{Log. } 762 - \log. 600,95 = 0,10311; \log \dots\dots & 9,01330 \\ s = 48,^{\circ}38; 1 + 0,002s = 1,0968; \log \dots\dots & 0,04013 \end{array}$$

$$\text{Valor aprox. } x = 2079,9; \log \dots\dots\dots \quad 3,31804$$

$$\frac{6x}{1000} = 12.$$

$$\begin{array}{ll} C'' = 18391 + 12 = 18403; \log \dots\dots\dots & 4,26489 \\ & 9,01330 \\ & 4013 \end{array}$$

$$\text{Valor correcto } x = 2081,2; \log \dots\dots\dots \quad 3,31832$$

En todos estos cálculos se pone b' en lugar de β prestando de las temperaturas de los barómetros; porque solo hay proporcion entre las columnas y las temperaturas suponiendo igual calor en el ambiente y en el mercurio, y que sean iguales las dilataciones del metal en una y otra estaciones.

164. *Caso segundo.* Si el lugar de las observaciones es del todo descubierto, y no hay el tiempo suficiente, ni las otras circunstancias favorables, se puede sospechar que el termómetro indique una temperatura incierta no correspondiente á la presión del aire; y entonces no se debe emplear en la determinación de x la regla del artículo precedente. Pero conociendo la temperatura media del aire al nivel del mar, y la indicación del barómetro en un lugar de la tierra, se pueden conocer los otros dos números. Con t y con b' hemos calcular t' , b :

$$b = 760 (1 + 0,00018 t),$$

$$t' = \frac{b't}{b}.$$

En el ejemplo del número 158 se tienen $t = 25,3$, y $b = 509,82$ milímetros. Sustituyendo en estas ecuaciones,

$$b = 760 (1 + 0,00018 \times 25,3) = 763,5 \text{ milímetros},$$

$$t' = \frac{509,82 \times 25,3}{763,5} = 16,9;$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 763,5 \text{ milím.} \\ t = 25,3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} b' = 509,82 \\ t' = 16,9 \end{array} \right\} \text{ Con } L = 5.^\circ$$

Calculando por la fórmula resulta $x=3505$ metros. Si la temperatura t hubiera tenido un error de un grado en menos, esto es, si $t=24,^{\circ}3$ se habria obtenido $x=3493,7$ metros: con $t=26,^{\circ}3$ $x=3518,3$; lo que manifiesta que en este segundo caso se debe conocer t exactamente, así como b' .

165. *Caso tercero.* Cuando se observa t' negativa, ya sea por las circunstancias meteorológicas, ó porque la cima de una montaña penetre en la región de la nieve perpetua, no se verifica la equivalencia $b t' = b' t$; porque hemos partido de la suposición de que disminuye progresivamente la temperatura del aire desde el límite inferior hasta el superior de la atmósfera, y la mayor altura en la tierra no llega á este último límite, en donde sería $t'=0$, y solo mas adelante se puede considerar negativa. Queda entonces el arbitrio de prescindir de las temperaturas observadas en las dos estaciones, y de calcularlas para obtener los cuatro números correspondientes; pero esto supone conocidas exactamente b, b' . El ejemplo del artículo 157 proporciona $b=762$ milímetros, y $b'=377,27$: prescindiendo de $t=25,^{\circ}3$ y de $t'=-1,^{\circ}6$ calcularemos estas temperaturas.

$$t=7,^{\circ}31 \quad (762-760)=14,^{\circ}62,$$

$$t' = \frac{377,27 \times 14,^{\circ}62}{762} = 7,^{\circ}24;$$

y serán los cuatro números

$$\left. \begin{array}{l} b=762 \\ t=14,^{\circ}62 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b'=377,27 \\ t'=7,^{\circ}24 \end{array} \right\} \text{ Con } L=1^{\circ}45'.$$

$$x=5877,5 \text{ metros.}$$

166. Para uso de las personas que no quieran calcular por logaritmos daré una tabla para determinar las alturas por medio del barómetro, que no requiere sino operaciones muy sencillas de aritmética. Su formación se funda en las siguientes consideraciones. Suponiendo dividida una columna de la atmósfera en tantas partes como milímetros se cuentan en la escala del barómetro, cada una de ellas corresponderá á un milímetro, y será mayor su grueso á mayor distancia de la superficie de la tierra para que su peso produzca el asiento de un milímetro: y como dicha columna de aire ha de tener la misma base que el interior del tubo del barómetro, lo que diríamos del volumen de cada una de sus partes podremos decir de su altura. Los volúmenes están en razón inversa de los pesos específicos; y así, llamando a , a' las alturas de dos partes ó capas de aire, g , g' sus gravedades específicas habrá la proporción

$$a : a' :: g' : g, \text{ y de aquí}$$

$$a' = \frac{ag}{g'}.$$

167. Hasta aquí hemos supuesto constante el peso específico del aire, é igual á la unidad para determinar el coeficiente de la fórmula; pero es claro que siendo 1 al nivel del mar, ó el numerador del quebrado $\frac{1}{10524}$, es variable en las alturas como expresa la última proporción. A este nivel, cuando se equilibran las columnas de aire y de mercurio se tiene la ecuación $10524b = a \times 1$; y si $b = 1$ milímetro resulta que la altura de la primera capa

de aire, la que se halla en contacto con el mar, es de 10524 milímetros, ó 10,524 metros. Sustituyendo este valor en la ecuacion de a' se tendrá

$$a' = \frac{ag}{g'} = \frac{10524}{g'}.$$

Falta determinar g' . Se tiene la mayor columna b en donde $g = 1$, y la menor en donde g' es tambien la menor; parece, pues, que los pesos específicos de dos capas de aire están en razon directa de las respectivas indicaciones del barómetro en dichas capas, ó que

$$g : g' :: b : b',$$

$$g' = \frac{g \cdot b'}{b} = \frac{b'}{b} :$$

y poniendo este valor de g' en la última ecuacion de a' ,

$$a' = 10524 \times \frac{b}{b'} = \frac{10524 \times 760}{b'} = \frac{7998,24}{b'}.$$

Esto quiere decir que para obtener la altura de una capa de aire correspondiente á una columna b' del barómetro se ha de dividir el número constante 7998,24 metros por dicha columna. Entre los 760 y 759 milímetros será

la altura a' de $\frac{7998,24}{759} = 10,538$ metros, ó 10538 milíme-

tros; y la suma $a + a' =$ altura absoluta $= 10,524 + 10,538 = 21,062$ metros á *cero* de temperatura y latitud.

Para $b' = 758$ milímetros $a'' = \frac{7998,24}{758} = 10,552$ metros, $a + a' + a'' = 10,524 + 10,538 + 10,552 = 21,062 + 10,552 = 31,614 =$ altura absoluta, &c. Todo cuanto se dice en esta parte de las nivelaciones barométricas es suponiendo que el barómetro cuya indicación es b se coloca en la parte superior de la primera capa de aire, ó 10,524 metros mas alto que la superficie del mar, en donde seria $b = 761$ milímetros; y aquel cuya indicación es b' en la parte superior de la última. Introduciendo el factor de las temperaturas se tiene la fórmula que se ha reducido á tabla

$$x = (a + a' + a'' + a''' \dots) (1 + 0,002s).$$

168. Cuando el barómetro en la estacion inferior señale mas de 760 milímetros, como sucede comunmente, se agregan á la altura hallada tantas veces 10,524 metros como milímetros pasen de los 760, restando 1 á este exceso: si $b = 762$ se agrega á la suma de las a una vez 10,524; si $b = 764$ el aumento seria de tres veces aquel número. En la primera columna de la tabla, que lleva las iniciales b, b' están las indicaciones de los barómetros; en la segunda las sumas $a + a' + a'' \dots =$ alturas; y en la tercera las diferencias, que tambien espresan las alturas ó gruesos de las capas de aire comprendidas entre dos indicaciones consecutivas, y sirven para hacer las interpolaciones. Por ejemplo, la capa de aire comprendida entre las presiones de 750 y 751 milímetros tiene la altura de 10,664 metros, y es tambien este número la diferencia entre las sumas 116,535 y 105,871 metros. Borrando la coma decimal espresarán estas diferencias los pesos específicos del

mercurio correspondientes á las presiones atmosféricas cuando se supone constante el del aire, ó sea el numerador del quebrado que espresa la razon entre ambos; porque entonces se tiene

$$p : p' :: a : a',$$

ya que la densidad del mercurio es mayor en donde tiene mas altura la capa de aire, ó es menor su densidad. Pero cuando $a = 10,524$ metros es el peso del mercurio 10524, esto es, $10,524 \times 1000$, luego en general

$$a' \times 1000 = p'.$$

Si $b' = 750$ milímetros será el peso específico del mercurio $10,664 \times 1000 = 10664$ veces mayor que el del aire, y la razon entre ambos $\frac{1}{10664}$.

169. El uso de la tabla es muy fácil. Eseríbese el número de la segunda columna correspondiente á solo los milímetros enteros de b' : multiplíquese por la parte decimal de estos milímetros la diferencia tomada en la tercera columna: réstese el producto del primer número, y multiplíquese el resultado por $1 + 0,002s$. Este producto seria la altura buscada si la tierra fuera esférica, pero no siendolo habrá que multiplicarlo por el factor $1 - e^2 \sin^2 L$, cuyos valores en las diferentes latitudes constan en la pequeña tabla que va al fin de la grande. Si $b > 760$ milímetros se agrega al resultado como ya se ha dicho, antes de multiplicarlo por el factor de las temperaturas, tantas veces menos una 10,524 como milímetros hubiere de exceso sobre los 760. Cuando se trata de hallar la dife-

rencia de nivel entre dos puntos se hará con las dos columnas barométricas lo dicho para b' y la diferencia entre los números resultantes multiplicada por el factor de las temperaturas será la diferencia de nivel.

170. Antes de ilustrar esta materia con ejemplos haremos una comparacion:

$$x = C (\log. b - \log. b') (1 + 0,002s),$$

$$x = (a + a' + a'' + a''' \dots) (1 + 0,002s);$$

$$a + a' + a'' + a''', \dots = C (\log. b - \log. b').$$

Se ve desde luego que las sumas de las alturas parciales vale tanto como las diferencias logarítmicas multiplicadas por el coeficiente cuatorial. Sea $b' = 740$; la suma de las a es por la tabla 223,967, y la diferencia $(\log. 761 - \log. 740) = 0,01215$, la cual multiplicada por 18416 produce 224,754 metros. La pequeña diferencia que se nota en estos dos resultados proviene de haber usado logaritmos con cinco cifras de mantiza, y del uso indispensable del cálculo por decimales; pero ella no altera considerablemente los resultados para x . También dividiendo los números de la tercera columna de la tabla por 18416 se obtendría la diferencia logarítmica de dos números consecutivos de milímetros: $\frac{10,823}{18416} = 0,00059 =$ diferencia entre los logaritmos de 741 y 740.

171. En el número 157 hemos hallado por mi fórmula logarítmica la altura del Chimborazo de 5877 metros con los datos $b = 762$ milímetros, $\beta = 378,31$, $1 + 0,002s = 1,0474$. Veamos el resultado que proporciona la tabla

Para 378 milím.....5603,002.....dif.....,21,215
 Parte decimal de β,31

21215
 63645

Producto sustractivo.....,6,57665

$$5603,002 - 6,577 = 5596,245.$$

Pero escediendo b 2 milímetros á 760 agregaremos al resultado una vez 10,524:

$$5596,245 + 10,524 = 5606,949;$$

$$5606,949 \times 1,0474 = 5872,7 \text{ metros.}$$

La diferencia que hay entre este resultado y el del artículo 157 proviene de haber entrado en la tabla con β en lugar de b' pues hemos preseindido del factor $1 + 0,00018d$ en la teoría esplicada en esta segunda parte. Repitamos la operacion con $b' = 377,27$ milímetros, que es la indicacion del barómetro, y con $1 + 0,002s = 1,044$, (art. 165):

Para 377 milím.....5624,217;.....dif.....,21,272
 Parte decimal de b',27

148904
 42544

Producto sustractivo....., 5,74344

$$5624,217 - 5,743 = 5618,474; \quad 24.$$

$$5618,474 + 10,524 = 5629$$

$$5629 \times 1,044 = 5876,7 \text{ metros.}$$

Para $L = 1^{\circ}45'$, $1 - e^2 \sin^2 L = 0,999987$, factor que no produce alteracion alguna en el valor de x ; de modo que

$$5876,7 \times 0,999987 = 5876,7.$$

172. D'Aubuisson y Mallet determinaron por medios geodésicos aplicados con la mayor proligidad y exactitud la altura de Mont-Gregorio en los Alpes á 45° de latitud, de 1708,4 metros sobre el llano; y despues hicieron repetidas observaciones, que dieron en término medio:

EN EL LLANO.

EN LA CIMA.

$$\left. \begin{array}{l} b = 742,2 \text{ milím.} \\ t = 19^{\circ},95. \\ T = 18,85. \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b' = 605,05 \text{ milím.} \\ t' = 9^{\circ},9. \\ T' = 10,5. \end{array} \right\} \text{Con } L = 45^{\circ}.$$

Por mi fórmula general, reduciendo b' á β por la dilatacion del mercurio, resulta $x = 1709$ metros. Por la suya calcula D'Aubuisson 1714,6. Veamos el resultado que proporciona mi tabla. Calcularemos primero las alturas absolutas de las dos estaciones, y la diferencia entre dichas alturas será la de nivel: despues determinaremos esta directamente.

$$7^{\circ},31 \times 2 = 14^{\circ},62 = t; \frac{742,2 \times 14,62}{762} = 14^{\circ},24 = t';$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 762 \text{ milím.} \\ t = 14,^{\circ}62 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b' = 742,2 \text{ milím.} \\ t' = 14^{\circ},24 \end{array} \right\} L = 45^{\circ}.$$

$$\begin{array}{r} \text{Para } 742 \text{ milím....., } 202,365 \text{ dif....., } 10,779 \\ \text{Parte decimal....., } \quad \quad \quad ,2 \end{array}$$

$$\text{Producto sustractivo}, 2,1558$$

$$202,365 - 2,156 = 200,209;$$

$$200,209 + 10,524 = 210,733;$$

$$1 + 0,0028 = 1,0577;$$

$$210,733 \times 1,0577 = 222,89.$$

El factor de 45° de latitud es 0,9946, y así

$$222,89 \times 0,9946 = 221,68 \text{ metros} = x'.$$

Esta es la altura del llano sobre el mar. Haciendo las mismas operaciones respecto á la cima de la montaña se obtienen los cuatro números

$$\left. \begin{array}{l} 762^m \\ 14^{\circ}64 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 605,^m05 \\ 11,^{\circ}61 \end{array} \right\} L = 45^{\circ}:$$

Y con tales datos resulta por la tabla $x = 1932,475$ metros. Ahora $x - x' = 1932,475 - 221,68 = 1710,795$ metros.

173. Despues de haber hecho correspondientes los números de dos estaciones con los del nivel del mar se

puede calcular directamente la diferencia entre dichas estaciones; porque $bt' = b't$, $bt'' = b''t$, y por consiguiente

$$b : b' :: t : t',$$

$$b : b'' :: t : t'',$$

$$b' : b'' :: t' : t'',$$

$$b't'' = b''t'.$$

Determinemos la altura de Mont-Gregorio sobre el llano por los números del artículo precedente:

EN EL LLANO. EN LA CIMA.

$$\left. \begin{array}{r} 742, 2 \\ 14,24 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 605,05 \\ 11,61 \end{array} \right\} L=45$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } 742^m \dots\dots\dots, 202,365 \\ \text{Para } 0,2 \dots\dots\dots, 2,159 \\ \hline \text{Dif} \dots\dots\dots, 200,206 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Para } 605 \dots\dots\dots, 1836,186 \\ \text{Para } 0,05 \dots\dots\dots, \quad ,662 \\ \hline \text{Dif} \dots\dots\dots, 1835,524 \end{array} \right\}$$

$$1835,524 - 200,206 = 1635,318;$$

$$1 + 0,002s = 1,0517;$$

$$1 - e^2 \text{sen}^2 L = 0,9946$$

$$1635,318 \times 1,0517 \times 0,9946 = 1710,57 \text{ metros} = x.$$

174. Ya que en todo caso se puede hacer $\frac{b}{b'} = \frac{t}{t'}$ se

podrá sustituir $\log \frac{t}{p}$ en lugar de $\log b - \log b'$ en la fórmula general; con lo que

$$x = C' \times \log \frac{t}{p} (1 + 0.002s.)$$

Despues de haber eliminado así las columnas barométricas nada hay mas fácil que la aplicacion. El artículo 165 nos da para el Chimborazo

$$t=14^{\circ}64; t'=7^{\circ}24; \frac{t}{p}=2,0193 \text{ cuyo } \log=0,3052;$$

$$1 + 0,002s=1,0437; C=18416 \text{ metros};$$

$$x=0,3052 \times 1,0437 \times 18416=5865,94 \text{ metros};$$

$$\frac{6x}{1000} + 18416=18451;$$

$$18451 \times 0,3052 \times 1,0437=5877,4 \text{ metros.}$$

175. Mr. Biot en su tratado de nivelaciones barométricas propone el ejemplo siguiente: el barómetro señala en Ginebra á $46^{\circ}12'$ de latitud 726,6 milímetros, y la temperatura del aire es de 12° . La primera de estas observaciones es de Cotte, y la segunda de Saussure; una y otra deben ser muy exactas por la gran práctica de los observadores, los muchos años que emplearon para deducir estos medios términos, y por deberse suponer colocados los instrumentos en buenos lugares segun las reglas

dictadas por la razon y la esperiencia. Se asegura que las observaciones de Schukburg son muy exactas á juicio de los sabios, y este autor da por resultados medios al nivel del mar á 50° de latitud $h=762,9$ milímetros, $t=12^{\circ}8$. Determinemos la altura de Ginebra por mi fórmula, á cuyo efecto daremos á los barómetros las temperaturas del aire

$$\left. \begin{array}{l} 762,9 \\ 12^{\circ},8 \\ 12^{\circ},8 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 726,6 \\ 12^{\circ} \\ 12^{\circ} \end{array} \right\} L = 46^{\circ}.$$

$$x=405,8 \text{ metros.}$$

Mr. Biot calcula $x=407,3$. Pero si preseindiendo de las temperaturas de los barómetros hacemos correspondientes los cuatro números determinando $t = \frac{762,9 \times 12}{726,6}$; tendremos

$$\left. \begin{array}{l} 762,7 \\ 12^{\circ},6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 726,6 \\ 12^{\circ} \end{array} \right\} L=46^{\circ}.$$

Por la fórmula resulta $x=406,7$ metros, y por la tabla $x=407,1$. Por la ecuacion del artículo 174 se tendria

$$\frac{t}{t'} = \frac{12,6}{12} = 1,05, \text{ cuya log.} = 0,02119;$$

$$1 + 0,002s = 1,0492;$$

$$C' = 18306;$$

$$x=0,02119 \times 1,0492 \times 18306 = 406^m,98;$$

$$\frac{6x}{1000} + 18306 = 18308;$$

$$x = 18308 \times 0,02119 \times 1,0492 = 407 \text{ metros.}$$

176. De lo que hemos espuesto se infiere que un barómetro, con tal que no llevè aire en lo interior del tubo, puede servir para determinar las alturas aunque tenga algun error por el *cero* de la escala; y lo mismo decimos de dos barómetros comparados. La condicion esencial es que se conozca bien el cociente $\frac{b}{b'}$, aunque varien los términos con tal que la variacion sea proporcional. Si dos barómetros que se empleen en una nivelacion tienen tubos de diámetros iguales, ninguna alteracion producirá en los resultados la capilaridad, porque ella debe variar proporcionalmente al peso de la atmósfera. Me parece, pues, que cometeria un error el que aplicase igual correccion de capilaridad en las dos estaciones. Llamando K la depression á 760 milímetros se tendrá la que corresponde á b' por la ecuacion

$$K' = \frac{K \times b'}{b}.$$

Que sean los tubos de cuatro milímetros de diámetro: como á 760 esta capilaridad de 2,^m0388 segun la tabla de Laplace, á 726,6 sería $K' = \frac{726,6 \times 2,0388}{760} = 1,923$. Corrigiendo ahora las columnas,

$$b = 760 + 2,039 = 762,039;$$

$$b' = 726,6 + 1,923 = 728,523.$$

Pero el cociente de $\frac{760}{726,6} = 1,046$; y el de $\frac{762,039}{728,523} =$

1,046: aquí se ve cumplida la condicion esencial, y demostrado que para un mismo barómetro, ó para barómetros de diámetros iguales es inútil la correccion de capilaridad. Cuando la diferencia entre los diámetros de dos barómetros sea corta, tambien se puede prescindir de esta correccion, que el discernimiento del ingeniero. sabrá valorizar. Concluiremos este artículo con la tabla de Laplace de las depresiones del mercurio en los barómetros de *cubeta*, porque en los de *sifon* se compensan dichas depresiones. Hay otra tabla en el *conocimiento de los tiempos* para el año de 1800; pero los números discrepan tan poco de los de Laplace que me ha parecido conveniente adoptar los de este autor por su justa celebridad.

DIAM. DE LOS TUBOS.

DEPRESIONES.

2 milímetros.....	4,5599 milímetros.
3.....	2,9023
4.....	2,0388
5.....	1,5055
6.....	1,1482
7.....	0,8813
8.....	0,6851
9.....	0,5354
10.....	0,4201
11.....	0,3506
12.....	0,2602
13.....	0,2047
14.....	0,1597
15.....	0,1245
16.....	0,0970
17.....	0,0754
18.....	0,0586
19.....	0,0430
20.....	0,0352

177. Las escalas de los barómetros son comunmente de laton, metal que se dilata unas diez veces menos que el mercurio; hay por consiguiente que hacer una correccion en las temperaturas indicadas por los termómetros fijos en las armaduras. Cuando sea T una de estas temperaturas $T - \frac{1}{10} T$ será la corregida por efecto de las diferentes dilataciones de los dos metales. Pero solo en el caso de usar la fórmula introduciendo β por b' podrá aplicarse esta correccion, que por lo comun es despreciable. Para tener idea de su valor consideremos las observaciones hechas en el llano del Piamonte, y en la cima de Mont-Gregorio por D'Aubuisson y Mallet.

En el llano $T = 19^{\circ},85$ corregida $= 19^{\circ},85 - 1^{\circ},98 = 17^{\circ},87$;

En la cima $T = 10^{\circ},5 \dots\dots\dots 10^{\circ},5 - 1^{\circ},05 = 9^{\circ},45$;

$b' = 605,05$ milímetros.

Con las temperaturas indicadas

$$\beta = b'(1 + 0,00018d) = 606,06 \text{ milímetros.}$$

y con las corregidas

$$\beta = b'(1 + 0,00018d) = 605,97.$$

$$606,06 - 605,97 = 0,09.$$

Esta pequeña diferencia de 0,09 milímetros produce una baja de cosa de 1,2 metros en la altura determinada por mi fórmula; de modo que en lugar de 1709 que resultaron usando las temperaturas corregidas se habrían obtenido con las indicadas $1709 - 1,2 = 1707,8$ número bien aproximado al verdadero, que es 1708,4 metros. D'Aubuisson se habría acreado mas á la verdad no corrigiendo dichas temperaturas, porque hubieran resultado 1713,4 en lugar de 1714,6 que calculó por su fórmula. Además, la diferencia 0,09 se pierde entre los errores inevitables de observacion y graduacion de la escala; y por eso he dicho antes que tal correccion es por lo comun despreciable.

178. Terminaremos el capítulo copiando un párrafo de Mr. Biot. “Ademas, dice, referiré aquí algunas indicaciones generales que Mr. Ramond ha deducido de sus numerosos experimentos; ellas servirán para ilustrar á los observadores sobre el grado de precision que pueden esperar de las medidas barométricas, segun los diversos estados de la atmósfera.—1.º Se estimarán, en general, las alturas demasiado febles cuando la observacion se haga por la mañana ó por la tarde; cuando el barómetro inferior está en un llano, y el superior en un valle estrecho y profundo; cuando el tiempo sea manifestamente tempestuoso, y en este caso se pueden cometer grandes errores.—2.º Al contrario, se estimarán las alturas demasiado fuertes cuando se observe entre las doce del día y las dos de la tarde ó las tres, principalmente en el estío, y en sol ardiente; cuando el barómetro superior está en la cima de una montaña, y el inferior en una garganta estrecha y dominada; cuando reina un viento fuerte de la region boreal, sobre todo

si se hace la observacion sobre una montaña, y si el viento sopla contra la vertiente mas escarpada (1).

(1) Yo no debo ocultar lo que me ha enseñado la práctica, y es que á las doce del dia y á las seis de la tarde, tanto el barómetro como el termómetro dan respectivamente indicaciones iguales si están en lugar abrigado; que un medio entre las observaciones de las doce y las tres, ó de las tres y las seis parece ser el conveniente para determinar las alturas, por lo menos en nuestros paises de la zona tórrida; que se deben desechar las observaciones de la mañana y de la noche; ó usarlas aplicando el método de los cuatro números correspondientes explicado en esta segunda parte. Por lo demas, el artículo 160 dá las reglas para saber aplicar con exactitud el método barométrico.

169. Tabla para medir alturas por medio del barómetro.

Se ha supuesto $C = 18416$ metros á cero de latitud.

b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.
760	10,524	10,524	661	1127,581	12,119	562	2426,370	14,257	463	3977,749	17,312
59	21,062	10,552	660	1139,700	11,137	61	2440,627	14,283	62	3995,061	17,350
58	31,614	10,566	59	1151,837	12,155	560	2454,910	14,308	61	4012,411	17,387
57	42,180	10,580	58	1163,992	12,174	59	2469,218	14,334	460	4029,798	17,425
56	52,760	10,594	57	1176,166	12,192	58	2483,552	14,359	59	4047,223	17,463
55	63,354	10,609	56	1188,358	12,211	57	2497,911	14,385	58	4064,686	17,502
54	73,963	10,622	55	1200,569	12,229	56	2512,296	14,411	57	4082,188	17,540
53	84,585	10,636	54	1212,798	12,248	55	2526,707	14,437	56	4099,728	17,579
52	95,221	10,650	53	1225,046	12,267	54	2541,144	14,463	55	4117,307	17,617
51	105,871	10,664	52	1237,313	12,286	53	2555,607	14,490	54	4134,924	17,656
750	116,535	10,679	51	1249,599	12,305	52	2570,097	14,516	53	4152,580	17,695
49	127,214	10,693	650	1261,094	12,324	51	2584,613	14,542	52	4170,275	17,734
48	137,907	10,707	49	1274,228	12,343	550	2599,155	14,569	51	4188,009	17,774
47	148,614	10,721	48	1286,571	12,362	49	2613,724	14,595	450	4205,783	17,813
46	159,335	10,736	47	1298,933	12,381	48	2628,319	14,622	49	4223,596	17,853

b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.
45	170,071	10,750	646	1311,314	12,400	547	2642,941	14,649	448	4241,449	17,893
44	180,821	10,765	45	1323,714	12,420	46	2667,590	14,674	47	4259,342	17,933
43	191,586	10,779	44	1336,134	12,439	45	2672,264	14,702	46	4277,275	17,974
42	202,365	10,794	43	1348,573	12,458	44	2686,966	14,730	45	4295,249	18,014
41	213,159	10,808	42	1361,031	12,478	43	2701,696	14,757	44	4313,263	18,055
740	223,967	10,823	41	1373,509	12,497	42	2716,453	14,784	43	4331,318	18,096
39	234,790	10,838	640	1386,006	12,517	41	2731,237	14,812	42	4349,414	18,137
38	245,628	10,852	39	1398,523	12,536	540	2746,049	14,839	41	4367,551	18,178
37	256,480	10,867	38	1411,059	12,556	39	2760,888	14,867	40	4385,729	18,219
36	267,347	10,882	37	1423,615	12,576	38	2775,755	14,894	39	4403,948	18,261
35	278,229	10,897	36	1436,191	12,596	37	2790,649	14,922	38	4422,209	18,303
34	289,126	10,912	35	1448,787	12,616	36	2805,571	14,950	37	4440,512	18,345
33	300,038	10,927	34	1461,403	12,633	35	2820,521	14,978	36	4458,857	18,387
32	310,965	10,942	33	1474,036	12,659	34	2835,499	15,006	35	4477,244	18,429
31	321,907	10,956	32	1486,695	12,675	33	2850,505	15,034	34	4495,673	18,472
730	332,863	10,972	31	1499,370	12,696	32	2865,539	15,063	33	4514,145	18,514
29	343,835	10,987	630	1512,066	12,716	31	2880,602	15,091	32	4532,659	18,557
28	354,822	11,002	29	1524,782	12,736	530	2895,693	15,119	31	4551,216	18,601
27	365,824	11,017	28	1537,518	12,756	29	2910,812	15,148	430	4569,817	18,644
26	376,841	11,032	27	1550,274	12,777	28	2925,960	15,177	29	4588,461	18,687
25	387,873	11,047	26	1563,051	12,797	27	2941,137	15,206	28	4607,148	18,731

b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.
724	398,920	11,063	625	1575,848	12,818	526	2936,343	15,235	427	4625,879	18,775
23	409,983	11,078	24	1588,666	12,838	25	2971,578	15,264	26	4644,654	18,819
22	421,061	11,093	23	1601,504	12,859	24	2986,842	15,293	25	4663,473	18,864
21	432,154	11,109	22	1614,363	12,880	23	3002,135	15,322	24	4682,337	18,908
720	443,263	11,124	21	1627,243	12,900	22	3017,457	15,352	23	4702,245	18,953
19	454,387	11,140	20	1640,143	12,921	21	3032,809	15,381	22	4721,198	18,998
18	465,527	11,155	19	1653,064	12,942	20	3048,190	15,411	21	4740,196	19,043
17	476,682	11,171	18	1666,006	12,963	19	3063,601	15,441	20	4759,239	19,089
16	487,853	11,186	17	1678,969	12,984	18	3079,042	15,470	19	4778,328	19,135
15	499,039	11,202	16	1691,953	13,005	17	3094,512	15,500	18	4797,463	19,180
14	510,241	11,218	15	1704,958	13,026	16	3110,012	15,531	17	4816,643	19,227
13	521,459	11,232	14	1717,984	13,048	15	3125,543	15,561	16	4835,870	19,273
12	532,691	11,249	13	1731,032	13,069	14	3141,104	15,591	15	4855,143	19,319
11	543,940	11,265	12	1744,101	13,090	13	3156,695	15,621	14	4874,462	19,366
710	555,205	11,281	11	1757,191	13,112	12	3172,316	15,652	13	4893,828	19,413
9	566,486	11,297	10	1770,303	13,133	11	3187,938	15,683	12	4913,241	19,460
8	577,783	11,313	9	1783,436	13,153	10	3203,651	15,714	11	4932,701	19,508
7	589,096	11,329	8	1796,591	13,177	9	3219,365	15,745	10	4952,209	19,556
6	600,425	11,345	7	1809,768	13,198	8	3235,110	15,775	9	4971,765	19,604
5	611,770	11,361	6	1822,966	13,220	7	3250,885	15,807	8	4991,369	19,652
4	623,131	11,377	5	1836,186	13,242	6	3236,692	15,838	7	5011,921	19,700

b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'
703	634,508	11,394	604	1849,423	13,264	505	3282,530	15,870	406
2	645,902	11,410	3	1862,592	13,286	4	3298,400	15,901	5
1	657,312	11,426	2	1875,978	13,308	3	3314,301	15,933	4
700	668,738	11,442	1	1889,246	13,330	2	3330,234	15,965	3
99	680,180	11,459	600	1902,616	13,353	1	3346,199	15,996	2
98	691,639	11,475	99	1915,909	13,375	500	3362,195	16,029	1
97	703,114	11,492	98	1929,344	13,394	99	3378,224	16,061	400
96	714,606	11,509	97	1942,738	13,420	98	3394,285	16,093	99
95	726,115	11,525	96	1956,158	13,442	97	3410,378	16,125	98
94	737,640	11,541	95	1969,600	13,465	96	3426,503	16,158	97
93	749,181	11,558	94	1983,065	13,488	95	3442,661	16,191	96
92	760,739	11,575	93	1996,553	13,511	94	3458,852	16,224	95
91	772,314	11,592	92	2010,064	13,533	93	3475,076	16,257	94
690	783,906	11,608	91	2023,597	13,556	92	3491,333	16,290	93
89	795,514	11,625	590	2037,153	13,579	91	3507,623	16,323	92
88	807,139	11,642	89	2050,732	13,602	490	3523,946	16,356	91
87	818,781	11,659	88	2064,334	13,626	39	3540,302	16,390	390
86	830,440	11,676	87	2077,960	13,649	88	3556,692	16,423	89
85	842,116	11,693	86	2091,609	13,672	87	3573,115	16,457	88
84	853,809	11,710	85	2105,281	13,696	86	3589,572	16,491	87
83	865,519	11,728	84	2118,977	13,719	85	3606,063	16,523	86

b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.	b, b'	ALTURA.	DIFER.
682	877,247	11,745	583	2132,696	13,743	484	3622,588	16,559	385	5456,048	20,829
81	888,992	11,759	82	2146,439	13,766	83	3639,147	16,594	84	5476,877	20,883
680	900,751	11,779	81	2160,205	13,790	82	3655,741	16,628	83	5497,760	20,938
79	912,530	11,797	580	2173,995	13,814	81	3672,369	16,663	82	5518,698	20,993
78	924,327	11,814	79	2187,809	13,838	480	3689,032	16,698	81	5539,691	21,048
77	936,141	11,832	78	2201,647	13,862	79	3705,730	16,733	380	5560,739	21,104
76	947,973	11,849	77	2215,509	13,886	78	3722,463	16,768	79	5581,843	21,159
75	959,822	11,867	76	2229,395	13,910	77	3739,231	16,803	78	5603,002	21,215
74	971,689	11,884	75	2243,305	13,934	76	3756,034	16,838	77	5624,217	21,272
73	983,573	11,902	74	2257,239	13,959	75	3772,872	16,874	76	5645,489	21,329
72	995,475	11,920	73	2271,189	13,983	74	3789,746	16,910	75	5666,818	21,386
71	1007,395	11,938	72	2285,181	14,007	73	3806,656	16,945	74	5688,204	21,443
670	1019,333	11,956	71	2299,188	14,032	72	3823,601	16,981	73	5709,647	21,501
69	1031,289	11,973	570	2313,220	14,057	71	3840,582	17,018	72	5731,148	21,559
68	1043,262	11,991	69	2327,277	14,081	470	3857,600	17,054	71	5752,707	21,617
67	1055,253	12,009	68	2341,358	14,106	69	3874,654	17,090	370	5774,324	21,675
66	1067,262	11,027	67	2355,464	14,131	68	3891,744	17,127	69	5795,999	21,734
65	1079,289	12,046	66	2369,595	14,156	67	3908,871	17,164	68	5817,733	21,794
64	1091,335	12,064	65	2383,751	14,181	66	3926,035	17,201	67	5839,527	21,853
63	1103,399	12,082	64	2397,932	14,206	65	3943,236	17,238	66	5861,380	21,913
62	1115,481	12,100	63	2412,138	14,232	64	3960,474	17,275	365	5883,293	21,973

L	$1-e^2 \sin^2 L$	L	$1-e^2 \sin^2 L$	L	$1-e^2 \sin^2 L$	L	$1-e^2 \sin^2 L$	L	$1-e^2 \sin^2 L$	L	$1-e^2 \sin^2 L$	L	$1-e^2 \sin^2 L$
1°	0,999997	8°	0,99979	15°	0,99927	22°	0,99848	29°	0,99746	36°	0,99626	43°	0,99497
2	0,999987	9	0,99974	16	0,99918	23	0,99835	30'	0,99730	37	0,99608	44	0,99478
3	0,99997	10	0,99967	17	0,99901	24	0,99821	31	0,99713	38	0,99590	45	0,99459
4	0,99995	11	0,99961	18	0,99897	25	0,99807	32	0,99696	39	0,99572	46	0,99441
5	0,99992	12	0,99953	19	0,99885	26	0,99792	33	0,99679	40	0,99553	47	0,99422
6	0,99988	13	0,99945	20	0,99874	27	0,99778	34	0,99662	41	0,99535	48	0,99403
7	0,99984	14	0,99937	21	0,99861	28	0,99762	35	0,99644	42	0,99516	49	0,99384
												50	0,99366

CAPITULO IX.

De las proyecciones.

179. No siendo la superficie de la tierra susceptible de *desenvolverse, desarrollarse*, ó hablando con mas propiedad, de *estenderse*; se forman diversas proyecciones de todo un hemisferio para los *mapamundis*, ó de una parte mas ó menos estensa de la superficie terrestre para las otras *cartas geográficas*. Segun la posicion que se quiere dar al ojo del observador toman las proyecciones sus nombres distintivos: cuando el ojo se supone colocado en la superficie de la tierra todos los puntos del hemisferio cóncavo ú opuesto se proyectan sobre el plano del círculo perpendi-

cular á la línea visual, que va del ojo al centro de la esfera; y la proyeccion se llama *estereográfica*. En ella el plano del círculo perpendicular á la línea visual es el *perspectivo*, su circunferencia limita la distancia, y el punto de vista es aquel de la superficie de la esfera opuesto diametralmente al ojo. Cuando se supone el observador á distancia infinita de la tierra el plano *perspectivo* es tambien el del círculo perpendicular á la línea de direccion, pero no se proyectan sobre él los puntos del hemisferio cóncavo, sino los del convexo, que están entre el ojo y el plano *perspectivo*; y la proyeccion se llama entonces *ortográfica* ú *ortogonal*. Estas dos proyecciones tienen construcciones especiales, que se esplicarán en este capítulo.

PARTE PRIMERA.

180. *Proyeccion estereográfica.* Cualquiera que sea la posicion del ojo sobre la superficie de una esfera, se le presentan circulares las proyecciones de todos los círculos en el plano *perspectivo*. Para demostrar este principio fundamental supongamos O el ojo observador, (fig. 37), OCQ la línea visual, el plano vertical sobre AB el *perspectivo*, en el cual se proyectan todas las partes del hemisferio representados por AQB. Que sea además NN' diámetro de un círculo perpendicular el plano horizontal OAQB: dicho círculo será la base de un cono oblicuo de vértice O, y su proyeccion sobre el plan *perspectivo* la seccion *m'*. Si el cono gira 180° sobre su eje Oc el punto *n* vendrá á *m*, y el *n'* se pondrá en *m'*; y en esta posicion habrá las equivalencias

$$ONN' = \frac{OAN'}{2} = \frac{OA}{2} + \frac{AN'}{2},$$

$$Onn' = \frac{OB}{2} + \frac{AN'}{2} = \frac{OA}{2} + \frac{AN'}{2},$$

$$ONN' = Onn'.$$

De aquí se infiere que mm' es paralela á NN' , y que la seccion nn' proyeccion del círculo NN' , es antiparalela de cono oblicuo NON' de base circular; luego es tambien circular. Esta demostracion se puede aplicar á cualquier otro punto para el ojo. y otro círculo del hemisferio cóncavo: los puntos del convexo tienen sus proyecciones fuera de la circunferencia que limita la distancia, como se echa de ver, puesto que la proyeccion de P' está en p' .

181. Suponiendo el ojo en uno de los polos de la tierra la proyeccion resulta *sobre el ecuador*, y tambien se llama *polar* por la posicion del punto de vista, que es el otro polo, y coincide con el centro del mapamundi. Si por los diferentes puntos del ecuador se llevan líneas rectas á su centro estas serán las proyecciones de los meridianos; y las de los paralelos serán círculos concéntricos al ecuador, que pasen por las divisiones del primer meridiano. En las cartas construidas sobre esta proyeccion se acostumbra hacer las divisiones de cinco grados, pero se pueden hacer menores si la escala es bastante grande. Para determinar los radios de los paralelos llevaremos las líneas ON , ON' , (fig. 37), las cuales darán los puntos n , n' en el plano perspectivo, y $\frac{nn'}{2} = ni$ será la medida del radio. Haciendo aplicacion de lo dicho se construirá la proyeccion polar de la fig. 38, en la que P representa el punto de vista, ó el polo opuesto al ojo, $AOQB$ el ecuador dividido en partes de 15° , PQ un cuadrante del meridiano

el cual resulta tambien dividido en partes de 15° . En esta proyeccion los paralelos mas distantes del polo se separan mas unos de otros, como se echa de ver en la figura, que los mas inmediatos. Si estuviera la tierra poblada en los polos, ó cerca de ellos, las cartas geográficas formadas así de tales paises se aproximarían á la perfeccion, porque las distancias que separan á los paralelos son poco diferentes entre sí; y las relativas á las zonas tórrida y templada serian muy imperfectas. Se ha reservado, pues, la proyeccion sobre el ecuador para las cartas celestes llamadas planisferios, y aún para ello se acostumbra hacerle una modificacion arbitraria, que consiste en dividir en partes iguales la perspectiva de un cuadrante del meridiano para que resulten los paralelos igualmente distantes unos de otros, como se manifiesta en la figura 39.

182. Cuando el punto de vista y el ojo están en el ecuador el plano perspectivo es el de un meridiano, y se llama la proyeccion *sobre el meridiano*. Para delinear los mapamundis se supone por lo comun que el plan meridiano perspectivo es el coluro de los equinoccios; el ojo y el punto de vista ocupan las intersecciones del ecuador y del coluro de los solsticios. Sea OQ, (fig. 40), un trazo del plano del ecuador, PP' el eje polar, OPQP' el plano meridiano de proyeccion: el ojo colocado en un punto del ecuador en la vertical de C veria las proyecciones de los círculos paralelos en arcos de círculos como se espresan en la figura. Para trazar estas proyecciones supondremos que el ojo se abate sobre el meridiano hasta colocarse en O: entonces llevando líneas por las divisiones de los dos cuadrantes del plano perspectivo, ellas marcarán sobre PP' y su prolongacion las extensiones de los diámetros de las

proyecciones, y los puntos medios de estos diámetros serán los centros. Tomemos por ejemplo las divisiones 30 y $30'$ del semicírculo OPQ : llevando las líneas $O30$, $O30'$ quedarán determinados sobre el eje los puntos b , a ; $\frac{ab}{2}$ dará el centro c del arco 30 á $30'$, y como el ecuador divide á la esfera en partes simétricas no habrá mas que trasladar la distancia Cc hácia la parte opuesta CP para encontrar el centro del paralelo correspondiente al otro hemisferio OPQ . Así de los demas. Las perspectivas de los meridianos se trazan llevando de los polos á las distancias $15, 30$, &c. de los cuadrantes opuestos al vértice líneas que determinen sobre la QO los diámetros $s m$, $s' m'$ en cuyos medios están los centros de las proyecciones PsP' , $Ps'P'$, entre los cuales son de 15° las diferencias de longitud.

183. Aunque la proyeccion esplicada sobre el meridiano es la mas usada para formar los mapamundis tiene el inconveniente de que los paises situados hácia la circunferencia resultan defectuosos por ser muy desiguales las extensiones ss' , sQ , (fig. 40); por lo cual se le aplica tambien una modificacion arbitraria: se dividen en partes iguales los diámetros PP' , OQ , correspondientes á las divisiones de la circunferencia $OPQP'$; y se hacen pasar arcos de círculos por tres puntos, los dos de la circunferencia y el respectivo del diámetro para los paralelos: y las divisiones del diámetro, y los polos para los meridianos. Vease fig. 41.

184. Si el ojo del observador se supone colocado en un punto de latitud determinada, el plano tangente á la esfera por el punto de vista es paralelo al horizonte del lugar, y la proyeccion se llama *sobre el horizonte*. La línea visual es tambien la vertical. Supongamos que PP' ,

(fig. 42), sea el eje de la tierra; el círculo máximo perpendicular á esta línea el ecuador; y que el punto O , ocupando un lugar en la vertical de C esté abatido sobre el plano de proyección $AOBQ$, cuyo centro C es el lugar de latitud determinada $OL=AP$, que en la figura es de 45° . Todos los paralelos al ecuador perpendiculares á PP' , son bases de conos oblicuos cortados por el plano perspectivo; y se tendrán sus proyecciones llevando de los extremos de sus diámetros las generatrices de los conos al ojo en O , las cuales determinarán sobre la AB los diámetros de dichas proyecciones, y sus medios serán los centros. El arco que pase por los puntos O, Q será la proyección del ecuador; porque siendo este círculo perpendicular al eje PP' y pasando su plano por el centro C la vertical debe estar en dicho plano, y en ella los puntos O, Q , levantado O y bajando Q hasta colocarlos en su verdadera posición. La proyección del meridiano principal cuyo trazo es pp' , está en el plano vertical, y la del meridiano distante 90° se presenta en círculo horizontal trazado sobre pp' . El diámetro perpendicular BQ es la línea de los centros de todas las proyecciones meridianas, y siempre ha de ser perpendicular al medio de pp' cualquiera que sea la latitud del lugar central C . Dicha línea es cuerda común de todas las proyecciones. Los puntos $d, e, f, \dots d', e', f', \dots$ se determinan, como en la proyección sobre el meridiano, llevando líneas desde un polo p á las divisiones de la proyección del meridiano de 90° de longitud, como se ve de ver en la figura. Las proyecciones de todos los meridianos pasan por tres puntos, los dos polos p, p' y las respectivas intersecciones $d, e, f, \dots$ en la línea de los centros.

185. La construccion que se acaba de esplicar es difícil en la práctica por necesitarse los extremos de los diámetros para determinar los centros de las proyecciones de los paralelos; y no tiene suficiente exactitud porque algunas líneas muy grandes se tiran por dos puntos muy inmediatos uno de otro. Es mejor determinar los radios por el cálculo, ó tres puntos para cada círculo, y trazarlo por el ángulo inscripto, ó bien por abeisas y ordenadas.

186. Teniendo ya idea en general de los métodos para formar los mapamundis con las proyecciones estereográficas, vamos á determinar analíticamente los valores de algunas líneas. Sean, (fig. 37)

La distancia de los centros del mapamundi y de la proyeccion de un círculo, $Ci = a$;

El radio de la proyeccion, $ni = y$;

El arco PQ comprendido entre el polo P y el punto de vista, ó sea la distancia angular $PQ = D$;

La distancia angular del polo á un punto de la circunferencia de un paralelo, ó el arco $PN = d$.

La sola inspeccion de la figura nos hace entender que los arcos

$$N'Q = N'P + PQ = D + d,$$

$$NQ = PQ - PN = D - d,$$

pero siendo CO el radio siempre igual á la unidad, Cn , Cn' son las tangentes de los ángulos de inclinacion CON , CON' que tienen por medida $\frac{1}{2} NQ$, $\frac{1}{2} N'Q$, por lo cual

$$\left. \begin{aligned} Cn' &= \text{tang. } \frac{1}{2} (D + d), \\ Cn &= \text{tang. } \frac{1}{2} (D - d), \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

de donde resulta, tomando la semisuma y semidiferencia,

$$\frac{C n' \pm C n}{2} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (D + d) \pm \text{tang. } \frac{1}{2} (D - d)}{2}$$

Sustituyendo $\frac{\text{seno}}{\text{coseno}}$ en lugar de tangente,

$$\frac{C n' \pm C n}{2} = \frac{\text{sen} \frac{1}{2} (D + d)}{2 \cos \frac{1}{2} (D + d)} \pm \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (D - d)}{2 \cos \frac{1}{2} (D - d)};$$

pero $\frac{C n' + C n}{2} = C i = x$, $\frac{C n' - C n}{2} = n i = y$, luego

$$x = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (D + d)}{2 \cos \frac{1}{2} (D + d)} + \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (D - d)}{2 \cos \frac{1}{2} (D - d)}.$$

$$y = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (D + d)}{2 \cos \frac{1}{2} (D + d)} - \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (D - d)}{2 \cos \frac{1}{2} (D - d)}.$$

Estas ecuaciones bastarian para determinar los valores de las líneas necesarias para trazar las proyecciones, pero se pueden simplificar. Si reducimos los segundos miembros á comunes denominadores, sustituimos los valores de los senos y cosenos de las sumas y diferencias, hacemos las multiplicaciones y escribimos $\text{sen } D$ por $2 \cos \frac{1}{2} D \text{sen } \frac{1}{2} D$, $\text{sen } d$ por $2 \cos \frac{1}{2} d \text{sen } \frac{1}{2} d$, resultarán

$$x = \frac{\text{sen } D}{\cos D + \cos d}, \dots\dots\dots (2)$$

$$y = \frac{\text{sen } d}{\cos D + \cos d} \dots\dots\dots (3)$$

Para hacer las trasformaciones se debe tener presente que si en la ecuacion general de $\text{sen } (\Lambda + B)$ se hace $B=A$ se deduce $\text{sen } 2 \Lambda = 2 \text{sen } \Lambda \cos \Lambda$, y de aquí $\text{sen } \Lambda = 2 \text{sen } \frac{1}{2} \Lambda \cos \frac{1}{2} \Lambda$; y ademas que $\cos \Lambda + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2} (\Lambda + B) \cos \frac{1}{2} (\Lambda - B)$.

187. En la *proyeccion polar* el punto de vista, que es el vértice de todos los conos que tienen por base los planos de los círculos paralelos, está coincidiendo con el centro del plan perspectivo; es, pues, nula la distancia de los centros, ó $x = o$. La distancia angular P entre el punto de vista y el polo es tambien nula; y así, para determinar el radio de cada paralelo haremos $D = o$ en la ecuacion tercera, con lo que

$$y = \frac{\text{sen } d}{1 + \cos d}.$$

El arco d es entonces el complemento de la latitud $= 90^\circ - L$, y la ecuacion

$$y = \frac{\text{sen } (90^\circ - L)}{1 + \cos (90^\circ - L)}$$

y como $\text{sen } (90^\circ - L) = 2 \text{sen } \frac{1}{2} (90^\circ - L) \cos \frac{1}{2} (90^\circ - L)$, $1 + \cos (90^\circ - L) = 2 \cos^2 \frac{1}{2} (90^\circ - L)$

$$y = \frac{2 \text{sen} \frac{1}{2} (90^\circ - L) \cos \frac{1}{2} (90^\circ - L)}{2 \cos^2 \frac{1}{2} (90^\circ - L)} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (90^\circ - L)}{\cos \frac{1}{2} (90^\circ - L)}$$

$$= \text{tang. } \frac{1}{2} (90^\circ - L) = \text{tang. } (45^\circ - \frac{1}{2} L).$$

Sapengamos que se quiera determinar el radio de la proyeccion del paralelo de 15° de latitud, (fig. 38). Se

tendrá $L = 15^\circ$, $\frac{1}{2} L = 7^\circ 30'$, $45^\circ - 7^\circ 30' = 37^\circ 30'$ el logaritmo tang. $37^\circ 30' = 9,88498$ que corresponde al número 0,76733 de partes del radio $PO = 1,00000$. Si con un compás llevamos este número de partes desde el centro comun P hasta 15, con el radio P 15 trazaremos la proyeccion del paralelo. Hemos dicho ya que los meridianos se representan por radios que van á las divisiones del ecuador. De este modo se ha formado la tabla siguiente de los valores de y en la proyeccion polar para cada 5° de latitud.

5° = L	0,91633 = y	25° = L	0,63607 = y	50° = L	0,36397 = y	70° = L	0,17633 = y
10	0,83910	30	0,57735	55	0,31530	75	0,13165
15	0,76733	35	0,52057	60	0,26795	80	0,08749
20	0,70021	40	0,46631	65	0,22169	85	0,04366
23° 5'	0,65604	45	0,41491	66° 32'	0,20770	90	0,00000

188. Hay otra modificacion de esta proyeccion, que es la de *Lorgna*. En ella se supone que la superficie del círculo perspectivo es equivalente á la del hemisferio proyectado, y que las de los ángulos comprendidos entre las proyecciones de los paralelos lo son á las de las zonas correspondientes. Sea, (fig. 43), el radio CA de la esfera = R; MM' el diámetro de un paralelo; AM su distancia polar, ó complemento de la latitud que hemos llamado d , $AB = a$ altura del casco esférico MAM'. La circunferencia de un círculo máximo de la esfera será $2pR$ siendo $\frac{1}{p}$ la razon del diámetro á la circunferencia; y $2paR$ expresará la superficie del casco. Si llamamos r el radio de la proyeccion del hemisferio, la superficie del círculo = $p r^2$; pero la condicion exige que ambas superficies sean equivalentes, luego

$$p r^2 = 2 p a R,$$

$$r^2 = 2 a R,$$

$$a : r :: r : 2 R.$$

Desde un punto M de la circunferencia de un paralelo llévase al polo la cuerda MA, que lo será de la distancia polar. Esta cuerda es media proporcional entre AB y AD, de modo que

$$AB : AM :: AM : AD,$$

$$a : r :: r : 2R,$$

de donde resulta.

$$AM^2 = 2 a R;$$

pero tambien $r^2 = 2 a R$, luego

$$r = AM.$$

Así, en esta proyeccion polar los radios de los paralelos son las cuerdas de las colatitudes. Cuando dado un hemisferio QAE, (fig. 43), se quiera proyectar segun el método de *Lorgna*, la cuerda AE de 90° será el radio del mapamundi con el cual se describirá la circunferencia *aqde* (fig. 44), y el círculo *bb'* trazado con la cuerda AM de la figura 43 será la proyeccion del paralelo de la latitud M. Y en general, dividiendo el cuadrante EMA, (fig. 43), en partes iguales, de 15 en 15° por ejemplo, llevando desde las divisiones cuerdas al poló A estas serán los radios de los paralelos. Es fácil conocer que una vez elegido el radio del mapamundi, para determinar los radios de las

proyecciones bastará llevar la cuerda aq , (fig. 44), y la perpendicular cn que va desde el centro c será el radio de la esfera (fig. 43); porque AE es la hipotenusa $= ac$ de un triángulo rectángulo isósceles: luego $cn = CA$. Entonces se tendrán las cuerdas como AM , que serán los diferentes radios. Como es tan sencilla esta construcción no hay necesidad de calcular los radios por medio del análisis.

189. Para determinar en la *proyección sobre el meridiano* los radios de los paralelos y de los meridianos, así como las distancias de las diferentes proyecciones al centro del mapamundi; se hace $D = 90^\circ$ en las ecuaciones (2) (3), puesto que el punto de vista se halla á 90° distante del polo: así que

$$y = \text{tang. } d,$$

$$x = \frac{1}{\cos. d}.$$

Busquemos, por ejemplo, el radio de proyección del paralelo de 15° de latitud:

$$y = \text{tang. } d = \cot. 15^\circ = 3,73205;$$

y la distancia central

$$x = \frac{1}{\cos d} = \frac{1}{\sin L} = \frac{1,00000}{25883} = 3,86354.$$

Trasladando desde el centro sobre el diámetro PP' , (fig. 40), tres radios del mapamundi, y además 0,863 se encontrará el centro de la proyección, desde el cual con

un radio de 3,732 partes se describirá el paralelo 15 15'; &c. En cuanto á las proyecciones de los meridianos haremos que D no sea la distancia del polo al punto de vista, sino la de cada meridiano al origen de las longitudes: si está en Q dicho origen $QS = D$ para la proyeccion del meridiano de 15°, QS' para el de 30°, &c. y considerando que la distancia del ecuador al polo $d = 90^\circ$,

$$y = \frac{1}{\cos D} = \sec. D,$$

$$x = \frac{\sin D}{\cos D} = \tan. D.$$

Para el meridiano de 15° de longitud tendremos, por ejemplo,

$$y = \sec. 15^\circ:$$

y como no todas las tablas de logaritmos incluyen los de secantes, recordaremos que $\log. \sec = \text{comp. log. cos.}$, y así

$$\text{comp. log. cos. } 15^\circ = 0,01506,$$

que corresponde al número 1,03528 partes del radio del mapamundi, que es la escala = 1,00000. Falta la distancia de los centros:

$$x = \tan. D = \tan. 15^\circ;$$

$$\log. \tan. 15^\circ = 9,42805,$$

que da 0,26792 partes del radio. Así, pues, llevando de C á t este número de partes se trazará la proyeccion Ps P' con un radio $ts = 1,03528$ partes. En la tabla si-

guiente están los valores de las distancias centrales, y de los radios de proyeccion para los paralelos y meridianos de 5 en 5 grados de latitud y de longitud.

LAT. Long.	PARALELOS.		MERIDIANOS.	
5°	11,43005=y	11,47371=x	1,00382=y	0,08749=x
10	5,67128	5,75871	1,01543	0,17633
15	3,73205	3,86370	1,03528	0,26792
20	2,74748	2,92380	1,06118	0,36397
23°28'	2,30351	2,51120		
25	2,14451	2,36620	1,10338	0,46°31
30	1,73205	2,00000	1,15470	0,57735
35	1,42815	1,74345	1,22077	0,70021
40	1,19175	1,55572	1,30541	0,83910
45	1,00000	1,41421	1,41421	1,00000
50	0,83911	1,30541	1,55572	1,19175
55	0,70021	1,22077	1,74345	1,42815
60	0,57735	1,15470	2,00000	1,73205
65	0,46631	1,10338	2,36620	2,14451
66°32'	0,43412	1,09016		
70	0,36397	1,06118	2,92380	2,74748
75	0,26792	1,03528	3,86370	3,73205
80	0,17633	1,01543	5,75871	5,67127
85	0,08749	1,00382	11,47371	11,43005.

190. Para trazar los meridianos en estos mapamundis se supone en Q el origen de las longitudes, y despues de trazados se hace la numeracion estableciendo el primer meridiano. La proyeccion de la eclíptica se traza por los dos puntos equinocciales, y por el del radio CP. ó CP' correspondiente á 23°28' de latitud; ó si no, puede servir de radio la cotangente de 23°28' = 2,30351. Debe notarse, sin embargo, que la eclíptica es útil en los planisferios celestes, y no tiene uso alguno en las cartas geográficas. Cuando se delinea un mapamundi con esta proyeccion sobre el meridiano, sea ó no modificada, se supone que el

plan perspectivo es el del coluro de los equinoccios; se divide la esfera en dos hemisferios, oriental y occidental; y despues de haber señalado con **CERO** el primer meridiano, se pone la numeracion al oriente y al occidente del primer meridiano. Que sea la figura 41 el hemisferio oriental, y el tercer meridiano contando por la izquierda el del observatorio de Greenwich: en este meridiano escribiremos **CERO**, 15° en el siguiente, 30, 45, etc. Si la escala fuera mayor se podrian trazar los círculos de 10 en 10, ó de 5 en 5 grados. En los cuatro cuadrantes del círculo perspectivo se escriben los grados de latitud.

191. Siendo una proyeccion estereográfica *sobre el horizonte* se tiene siempre, (fig. 42), $D=PQ=\text{complemento de la latitud}=90^\circ-L$; por consiguiente, las ecuaciones (2) (3) se trasforman en

$$x = \frac{\cos L}{\operatorname{sen} L + \cos d},$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} d}{\operatorname{sen} L + \cos d}.$$

Cuando $d=PN=0,=180^\circ$, el radio $y=0$; y la ecuacion pertenece á los polos P, P'. Dando diferentes valores á d desde 0 hasta 180° se obtendrán las distancias de los centros, y los radios de los paralelos: mas allá de 90° el $\cos d$ es negativo. Busquemos, por ejemplo, los valores de x, y para delinear la proyeccion del paralelo distante 75° del polo P, siendo la latitud L del lugar que ocupa el centro de la figura, de 30°:

$$x = \frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 75^\circ} = 1,22177,$$

$$y = \frac{\text{sen } 75^\circ}{\text{sen } 30^\circ + \cos 75^\circ} = 1,273.$$

Los dos números espresan partes del radio. No determinaremos analíticamente las líneas de las proyecciones de los meridianos, porque el método gráfico explicado antes no presenta dificultades. Además, esta proyeccion es poco usada para formar los mapamundis; pues, como ya se ha dicho, la proyeccion sobre el meridiano es casi la única adoptada al efecto, asi como la polar para los planisferios celestes.

192. No estará de mas recordar aquí la propiedad de un ángulo inscripto, que tiene su vértice en la circunferencia de un círculo. Si una tablilla DAB, (fig. 45), se hace girar alrededor de uno de sus puntos C, el ángulo A describirá una circunferencia, pues en todas partes tendrá por medida la mitad de un arco igual con DEB. De esta propiedad resulta que para describir un arco de círculo de radio demasiado grande, que no se pueda tomar cómodamente con un compás, se formará una regla ó *falsa escuadra* DAB, (fig. 46), móvil en el punto A por medio de una charnela, para acomodarla á tres puntos dados de la circunferencia, por ejemplo *b*, A, *d*. Entonces sujetando la regla á pasar continuamente por estos tres puntos irá describiendo el arco *b* A *d*, ó por movimiento continuo si en A hay una punta de lápiz, ó señalando solo algunos puntos para trazar despues un polígono de lados pequeños. Este arbitrio se puede aplicar en la figura 42 para trazar las proyecciones de los paralelos mas allá de 90° distantes del polo cuando *cos d* es negativo.

PARTE SEGUNDA.

193. *Proyecciones ortográficas.* Ya que se supone al observador á distancia infinita del plano de proyeccion, todas las líneas que caen sobre él perpendicularmente serán paralelas entre sí, y sus intersecciones con dicho plano formarán las proyecciones de todas las partes del hemisferio superior. Así, pues, la proyeccion de una línea recta será una recta, la de un círculo horizontal un círculo, y la de un inclinado una elipse.

194. Si la proyeccion es *sobre el ecuador* todos los meridianos se presentan verticales, y sus proyecciones en líneas rectas, que salen del polo como centro á los puntos de las divisiones del ecuador. Los paralelos son horizontales, y sus proyecciones círculos cuyo centro comun es la proyeccion del polo, y cuyos radios son iguales á los cosenos de las latitudes. En la *figura 47* se supone el plano del meridiano de proyeccion E Q abatido sobre el plan perspectivo, de modo que los números 15, 30, etc. representan los grados de latitud. Las perpendiculares 15c, 30c', etc. son los senos de las latitudes de 15°, 30°....., y las distancias centrales Pc, Pc'..... los cosenos, que son tambien los radios de los paralelos de esas mismas latitudes. Se echa de ver que un mapamundi formado con esta proyeccion ortográfica tendria defectos contrarios á los que produce la polar estereográfica: en la que ahora esplicamos resultarian mas imperfectos los paises cercanos á los polos, porque en estas regiones son mayores las diferencias entre las distancias de los paralelos, y menores en los paises de la zona tórrida, como lo manifiesta la *figura*; y en la estereográfica es lo contrario (núm. 181),

las proyecciones de los paralelos se van aproximando unas á otras cuanto mas se acercan á los polós.

195. *Sobre el meridiano.* El ojo se supone sobre un punto del plano ecuatorial á distancia infinita del plan perspectivo. Los paralelos se proyectan en líneas rectas, y las distancias centrales de sus planos son los cosenos de las latitudes: los meridianos inclinados se proyectan en elipses que tienen el eje polar por eje mayor comun á todos. El eje menor de cada una de las elipses se determina á uno y otro lado del centro del mapamundi por los senos de las longitudes, ó sea del ángulo que hace el plano de cada meridiano con el de aquel cuya proyeccion se confunde con el eje de la tierra. Se trazan las elipses con el compás, ó por medio del hilo igual á la suma de los radios vectores, (fig. 48). Los ángulos $015C$, $030C$, etc. son los que forman los planos de los meridianos con el que se proyecta sobre $0C$; y los senos $15c$, $30c'$ son los semisejes de las elipses correspondientes.

196. Cuando la proyeccion es *sobre el horizonte de un lugar determinado*, como toda proyeccion ortográfica de un círculo es elíptica, tanto los meridianos como los paralelos se proyectan en elipses, escepto el meridiano zenital que se presenta en línea recta: es, pues, esta proyeccion la estereográfica sobre el horizonte en la cual se delinean elipses en lugar de círculos.

PARTE TERCERA.

197. *De las cartas.* Al formar el plano de una parte mas ó menos estensa de la superficie de la tierra, siempre se comete algun error debido á la *planificacion* de un casco esferoidal, ó sea á su proyeccion ortográfica sobre una

superficie plana. Las cartas que se usan generalmente se llaman *planas, reducidas y cónicas*, entrando en la significacion de estas últimas la de *Flamsteed y la francesa*.

198. *Cartas planas.* Se supone que la superficie de todo el país que se ha de representar en la carta es plana, todos los grados de longitud iguales entre sí, y con los de latitud: los meridianos se representan con líneas rectas paralelas, y tambien los círculos paralelos al ecuador. De la delineacion de unos y otros resulta una cuadrícula ó conjunto de cuadrados iguales cuyos lados van en las direcciones norte sur, éste oeste. El meridiano principal será el origen de las longitudes orientales y occidentales, y el ecuador el de las latitudes. Supongamos un país comprendido entre los paralelos de 16° y de 18° ; y entre los meridianos de 1° al este del principal, y $50'$ al oeste. Para formar la cuadrícula se lleva una recta A B, (fig. 49), en la direccion este oeste para representar el paralelo superior, y se le da una estension arbitraria, por ejemplo de media vara. Si la longitud al este fuera igual á la del oeste, el primer meridiano seria una perpendicular enmedio de A B; pero no habiendo esta igualdad en nuestro ejemplo, haremos lo siguiente: la suma de $1^{\circ}+50'=110'$ dividida por 10 da once divisiones de $10'$ cada una para la A B, y el meridiano principal ha de pasar por la sexta contando de izquierda á derecha; así quedarán $50'$ al este, y $1^{\circ}=60'$ al oeste. La diferencia de latitudes es de $2^{\circ}=120'$, que divididos tambien por 10 dan doce divisiones para el meridiano, con las cuales y con las de A B se formaria el cuadro A B C D. Pudiera haberse hecho otra division de 5 en 5 minutos, de 15 en 15; ó de grado en grado segun la estension del país, y el tamaño del cuadro. Una vez formado éste se van situando los diferentes pun-

tos por sus coordenadas reectangulares, y dibujando las montañas, los rios, etc.

199. Las cartas planas solo convienen á países muy pequeños en donde se pueden suponer iguales las superficies planas que abrazan dichas eartas, y las correspondientes esféricas: entonees tienen la ventaja de que una sola escala de medidas itinerarias sirve para todas las zonas, respecto á ser iguales todos los grados de longitud y de latitud. Pero en países muy estensos dan siempre estas cartas las distaneias mayores de lo que son realmente, por el ensanche que toman no dando á los meridianos sus inclinaciones hácia los polos, ni á los paralelos su verdadera situacion.

200. *Cartas reducidas.* Como todos los meridianos pasan por los polos, tienen mayor estension lineal los grados del ecuador que los de cualquier paralelo. Sea EQ el trazo del ecuador, ML el de un paralelo cuya latitud = EL, (fig. 50): las circunferencias son proporcionales á sus radios, y así

$$\text{circ. EC} : \text{circ. OL} :: \text{EC} : \text{OL};$$

esto quiere decir, que un grado del ecuador es con un grado de cualquier paralelo como el radio del primero es con el radio del segundo, puesto que las circunferencias son proporcionales á sus partes de igual denominacion. Pero el radio OL es tambien el seno de la distaneia polar LP, ó el coseno de la latitud EL; luego llamando g el grado del ecuador, g' el de un paralelo, a el radio del primero, y L la latitud, se tendrá en general

$$g : g' :: a : \cos L,$$

$$g' = \frac{g \times \cos D}{a}$$

Si hacemos $a = 1,00000$ los grados de los diferentes paralelos se podrán tomar con el compás en partes del radio, haciendo de este una escala de partes iguales. Esta es la ley que guarda la convergencia de los meridianos hacia los polos, en donde $\cos L = 0$. Si después de haber trazado las proyecciones ortográficas de los paralelos, y fijado el primer meridiano cuya proyección es línea recta, se da la extensión correspondiente á los grados de los paralelos por la última fórmula; los meridianos, inclinándose á los polos pasarán por las diferentes divisiones de dichos paralelos, y se habrá formado la proyección para una *carta esférica*, que abraza una parte determinada de la superficie del globo terrestre.

201. En lugar de tomar por unidad el grado del ecuador se puede hacer $= 1,00000$ el del paralelo mas distante, y calcular la extensión de los *grados crecientes* de latitud, ó sean *partes meridianas ó meridionales*. Sea CB el grado del paralelo, el cual sirve de unidad; si se traza el arco BD indefinido, y se forma el ángulo central BCD = latitud, en la cual se desea determinar la extensión del grado del meridiano, (fig. 51): levantando la tangente BL quedará conocida la secante CL de la latitud. Cuando $L = 40^\circ$, por ejemplo, la extensión del grado del meridiano desde el paralelo de 39 hasta el de 40° será $\sec. L = CL = 1,30541$ partes del radio CB, ó si este se divide en $60'$ corresponderán al de latitud $78' = 60 + \frac{60 \times 3}{10}$ entre los paralelos de 39 y 40° . Con que en estas *cartas esféricas reducidas*, ó formadas con la *proyección de Mercator*, se delinean los paralelos en líneas rectas con latitudes crecen-

tes, y los meridianos tambien en líneas rectas que pasan por las divisiones iguales del ecuador y de los paralelos. La cuadrícula se compone de un conjunto de rectángulos de bases iguales y de alturas desiguales, colocándose en ellos los diferentes puntos de la superficie de la tierra por coordenadas rectangulares.

202. En una carta reducida cada zona comprendida entre los paralelos debe tener una escala de partes iguales en medidas itinerarias, y una general para las distancias orientales ú occidentales. Si en el ecuador tiene un grado 26,66 leguas, en la zona de 39 á 40° tendrá $34,66 = 26,66 \times 1,3$ para las distancias al Norte ó al Sur. Este inconveniente, y el principal de dar muy desfigurada la superficie de la tierra harian abandonar estas cartas si no fuera por la comodidad que ofrecen á los marinos para determinar las coordenadas geográficas por el rumbo y el camino de un navío. Algunos geógrafos las han adoptado para las cartas terrestres, y el Sr. de Humboldt formó sobre la proyeccion de que tratamos la carta de la Nueva España y sus provincias internas.

203. *Cartas cónicas.* Un cono tangente al paralelo medio del país que se ha de figurar, y cuya superficie se estienda en plano, es lo que forma lo que llaman proyeccion cónica, la cual se representa por una parte de sector de círculo. Todos los paralelos son arcos circulares trazados desde el vértice del cono; y los meridianos líneas rectas convergentes hácia el propio vértice, y divididos en partes iguales por los grados de latitud. En la fig. 52 se ve una superficie cónica tendida en plano: SO es el meridiano medio del país, y NS, MS los dos extremos que

determinan los grados de longitud entre los cuales se limita la carta; AB el paralelo medio, y MN, *mn* los dos extremos. La carta estará, pues, comprendida entre los grados de longitud N, M, y los N, *n* de latitud. Luego se echa de ver que desde el paralelo medio hácia el polo los cuadriláteros cónicos son mas pequeños que los correspondientes esféricos, y la diferencia es mayor conforme es mayor la latitud; y al contrario desde el paralelo medio hácia el ecuador. Los meridianos SN, SO, SM prolongados marearian en el plano del ecuador grados de longitud mucho mayores de lo que son realmente sobre el ecuador terrestre. Apesar de estos inconvenientes los geógrafos prefieren las cartas cónicas para figurar países de no muy grande estension, como se puede ver en los atlas, reservando para los continentes las proyecciones estereográficas sobre el meridiano; y la razon de tal preferencia es la sencillez de la construccion.

204. Pero si una carta se ha de formar en escala muy grande, el vértice del cono viene á estar en tal distancia que no bastarian los mas grandes compases para describir los paralelos: entonces se trazan como se dirá luego, auxiliándose del cálculo. Que sea EC, (fig. 53), el radio del ecuador, Ae el del paralelo medio, EA=L la latitud de este paralelo; la generatriz del cono será la tangente SA=tang. ACS=cot. L, porque ACE=L es complemento de ACS. El radio Ae del paralelo es, como ya se ha visto y como demuestra la figura, el cos. L. Llamando *g* el número de grados del arco AB, (fig. 52), rectificado, y cuyo radio es Ae, (fig. 53), se tendrá

$$180^\circ : p \times \cos. L :: g : \frac{g p \cos. L}{180} = AB;$$

Pero tomando el radio $SA = \cot. L$ para describir el arco de proyeccion AB , habrá otro valor:

$$180^\circ : p \times \cot. L :: \text{ángulo } \hat{S} : \frac{Sp \cot. L}{180} = AB;$$

é igualando estos dos valores,

$$gp \cos. L = Sp \cot. L,$$

de donde resulta despejando

$$S = \frac{gp \cos. L}{p \cot. L} = g \text{ sen. } L.$$

De aquí se deduce que para delinear la cuadrícula de una carta cónica se ha de formar el ángulo del sector $= g \text{ sen. } L$, y tomando por radio $\cot. L$ se ha de trazar desde el vértice el paralelo medio. La estension de la carta en la direccion del meridiano se ha de medir por el arco que comprende todos los grados de latitud rectificado, partiendo desde el paralelo medio hácia el norte y sur. En tal estado solo habrá que dividir los arcos paralelo y meridiano, y trazar las proyecciones como se ha dicho; esto es, los paralelos desde el vértice, y los meridianos llevando á dicho vértice radios del sector.

205. Véamos ahora cómo se trazan los paralelos cuando el vértice del cono se halle muy distante. Supongamos $SAOB$ el sector, (fig. 54), y AOB el paralelo medio: llamando r el radio de este sector, ó la distancia $SA = SO$, se tendrá

$$r = R \times \cot. L,$$

introduciendo el radio R del globo. Como se conoce el número g de grados en longitud,

$$S = g \text{ sen } L.$$

Determinemos tres puntos del arco AOB para poder trazarlo: en el triángulo rectángulo SPA

$$AP = r \text{ sen } \frac{1}{2} S,$$

$$SP = r \text{ cos } \frac{1}{2} S,$$

$$OP = r - r \text{ cos } \frac{1}{2} S = r (1 - \text{cos } \frac{1}{2} S).$$

Luego habiendo delineado sobre el cuadro dos ejes rectangulares AB, SO se tomará desde P con el compás el valor de P A, y quedará determinado el punto A; el propio valor determinará el B: tomando despues PO se tendrán los tres puntos P, O, B para trazar el arco por movimiento continuo. Para llevar las generatrices AS, BS, se pueden hacer con el trasportador en A y en B los ángulos SAB, SBA; porque

$$SAB = SBA,$$

$$SAB = \frac{180^\circ - S}{2}.$$

Y para concluir se procederá como queda espleiado en el artículo anterior, y se situarán los diferentes puntos por sus coordenadas.

206. Hagamos una aplicacion. Todo el país mexicano está comprendido entre los paralelos de 15 y 42° de

latitud Norte, y su estension en longitud es de 38° . El paralelo medio es el de 27° de latitud, y así, $L = 27^\circ$, $g = 38^\circ$. Si el radio medio de la tierra $R = 6.366.653$ metros será su logaritmo 6,8039112:

$$\log. r = \log. R + \log. \cot. L,$$

$$\begin{array}{r} 6,8039112 \\ 0,2928341 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. r = „7,0967453, r = 12.495.259 \text{ metros.}$$

El ángulo del sector, $S = g \text{ sen } L$,

$$\log. S = \log. g + \log. \text{sen } L;$$

$$\begin{array}{r} 1,5797836 \\ 9,7893420 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log. S = „1,3691256, S = 17^\circ 15' 7'', 2, \\ \frac{1}{2}S = 8^\circ 37' 33'', 6. \end{array}$$

La distancia $AP = r \text{ sen } \frac{1}{2} S$,

$$\log. AP = \log. r + \log. \text{sen } \frac{1}{2} S;$$

$$\begin{array}{r} 7,0967453 \\ 9,1760449 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. AP = „6,2727902, AP = 1.874888 \text{ metros.}$$

La flecha $OP = r (1 - \cos \frac{1}{2} S)$,

$$\log. OP = \log. r + \log. (1 - \cos \frac{1}{2} S),$$

$$1 - \cos \frac{1}{2} S = 0,01131;$$

log. r, 7,0967453

log. 0,01131....., 8,0534626

log. OP....., 5,1502079, OP = 141321 metros.

Los 1.874.888 metros de AP hacen 2.237.336 varas de México, ó 447,46 leguas; y los 141.321 de OP 168641 varas, ó 33,73 leguas. Así, habiendo tirado las coordenadas PS, AB indefinidas haremos PA de 447 leguas de la escala adoptada, de igual estension PB, y OP de 33. Por los tres puntos A, O, B trazaremos un arco cuyo centro estaria en S; en A y en B haremos los ángulos SAB, SBA iguales á $81^{\circ}22'26''4$; porque siendo isósceles el triángulo ASB, y $S = 17^{\circ}15'7''2$ resulta aquella cantidad para A y para B: y llevaremos indefinidas las generatrices AS, BS.

207. En vez de círculos se pueden trazar polígonos de lados muy pequeños por medio de abcisas y ordenadas. Siempre se tiene la ecuacion

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

correspondiente al punto S origen de las coordenadas, el cual trasportado á P producirá en dicha ecuacion fundamental una alteracion: la abcisa x tendrá un aumento que llamaremos a , con lo que

$$r^2 = (x + a)^2 + y^2,$$

$$x = \pm (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - a = \pm \sqrt{(x + y)(x - y)} - a.$$

Por consiguiente, dividiendo las líneas A P, P B en partes pequeñas iguales, para cada valor de y como Pn se determinará el de x como nm; y por los extremos de to.

das las α se hará pasar la línea poligonal. Esto supone haber determinado el radio r por la ecuacion $r=R \cot L$; y los puntos A, B del mismo modo que ántes.

208. En la *proyeccion de Flamsteed* se figuran los paralelos por líneas rectas perpendiculares al primer meridiano, el cual se divide en partes iguales suponiendo esférica la tierra; y los grados de los paralelos son los cosenos de las latitudes. Los otros meridianos dirigiéndose al polo pasan por los extremos de todos los cosenos formando líneas curvas. Supongamos un pais comprendido entre los grados 15 y 75 de latitud, y que se haya adoptado para el grado del paralelo medio la línea CA, (fig. 55): como este paralelo medio será el de 45° se formará con la CA un ángulo $ACB=45^\circ$; y $CB=CE$ será la estension lineal del grado del ecuador, ó el primero del meridiano, CT la del paralelo de 30 , CU la del de 15 , CS la del de 60 , y la CQ la del de 75° por ser estas líneas los cosenos de las latitudes. En lugar de esta construccion se pueden calcular los valores de los cosenos suponiendo el grado del ecuador dividido en un número decimal de partes, en 1000 por ejemplo. Si es G el grado ecuatorial, y g el del paralelo de una latitud L, se tendrá en general

$$G : g :: 1 : \cos L,$$

$$g=G \cos L=1600 \cos L.$$

Coseno de $45^\circ=0,70710$, multiplicado por 1000 produce 707,1 para el grado del paralelo de 45 . Así, despues de haber trazado las coordenadas, meridiano línea reeta, y paralelo medio, se dividirá este á derecha é izquierda en

partes iguales de 707,1 de la escala. Un cálculo semejante determinará las partes de cada uno de los paralelos. Cuando se quiera llevar en cuenta la elipticidad de la tierra no se divide el meridiano principal en partes iguales, sino crecientes, dando los crecimientos desde el ecuador á los polos del modo que vamos á decir. Pero aun con esta modificacion siempre tiene el inconveniente la proyeccion de Flamsteed de desfigurar los paises muy distantes al oriente y al poniente del meridiano principal, puesto que se representan con líneas rectas todos los paralelos; y este es el defecto de los planisferios del citado autor.

209. Suponiendo que la tierra es un elipsoide de revolucion será menester substituir por R el valor de la grande normal en la ecuacion $r = R \cot L$, con lo cual

$$r = \frac{a \cot L}{1 - e^2 \sin^2 L},$$

siendo a el radio del ecuador. Si damos á los grados del meridiano las estensiones lineales que tienen á diferentes latitudes, y por los puntos de division se trazan los paralelos circulares desde el vértice del cono se tendrá la *proyeccion francesa ó del Depósito de la guerra*, sobre la cual se ha formado la nueva carta de Francia. Veámos cómo se determinan los grados del meridiano. Los arcos de esta elipse se confunden con los de su círculo osculador respectivamente, y las estensiones de dos grados son proporcionales á los radios de curvatura; y así, siendo p y p' estos radios, y g , g' los grados que les corresponden,

$$g : g' :: p : p'.$$

Luego conocida la estension de un grado, su radio de curvatura, y el que corresponde á otro grado se podrá determinar este último. Si en la figura 52 se toma ab de una estension arbitraria segun la magnitud de la carta, y se divide en cierto número de partes que formen la escala, por ejemplo 100,000, se determinarán los otros grados bc , cd , $a'b'$, $b'c'$, y por los puntos b , c , d , b' , c' , d' se describirán los paralelos circulares, habiendo calculado el radio

$$r = \frac{a \cot L}{1 - e^2 \sin^2 L} \cdot Y \text{ en cuanto á las partes } a, e, f, \dots \text{ de}$$

paralelos, se toman iguales á los cosenos de la latitud como se dijo antes. Entonces los meridianos formarán líneas poligonales tanto mas semejantes á curvas cuanto mayor sea la escala ab ; pues que se podrán llevar las proyecciones de 5 en 5, de 10 en 10, y acaso de 1 en 1 minutos para la formacion de la carta, dejando despues en tinta los que pareciere conveniente, y borrando los otros.

210. Supongamos que el paralelo medio sea el de 27° , y que ab , (fig. 52), esté dividido en 1000,000 partes iguales; calculemos el radio de curvatura para este grado:

$$r = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}} \text{ (art. 26)}$$

Con $a=6.376.950$log.	6,8046130
-----------------------------	-----------

$e^2=0,00648$log.	9,9971766
-------------------------	-----------

Numerador.....log.	16,8017896
--------------------	------------

Log. e^2	7,8115750
------------------	-----------

Sen 2 27°log.	9,3140936
-------------------------------	-----------

$e^2 \sin^2 27^\circ=0,0013355$log.	7,1256686
---	-----------

$$\begin{array}{rcl} 1 - e^2 \sin^2 27^\circ & = & 0,9986645 \\ (1 - e^2 \sin^2 27^\circ)^{\frac{3}{2}} & \dots\dots\dots \log. & 9,9991285 \\ \log. \text{ numerador.} & \dots\dots\dots & 16,8017896 \end{array}$$

$$r = 6.348.354^m \dots\dots\dots \log. \quad 6,8026611.$$

Este sería el radio osculador del grado 27 de latitud. Calculando del propio modo el correspondiente al grado 15, resultaría $r' = 6.336.913$ met.; y con estos datos se determinaría la estension del grado del meridiano, porque

$$6.348.354 : 100.000 :: 6.336.913 : x = 99820 \text{ partes.}$$

211. La cantidad $e^2 = 0,00648$ corresponde á un aplanamiento de $\frac{1}{308,6}$, y es el que adoptó el Depósito de la guerra para formar la nueva carta de Francia suponiendo muy exacta la medida de la meridiana que atraviesa este reino, y se limita en Greenwich y en la isla Formentera. Pero este aplanamiento no es aplicable á todos los países, pues para eso sería menester que las medidas ejecutadas en distintas partes dieran resultados iguales; y esto no se verifica, como se ha visto en la tabla del artículo 34. Lo mas prudente sería, en el caso de adoptar la proyeccion francesa, usar el aplanamiento que resultara de medidas hechas en el país cuya carta se quisiera levantar. Si la tierra fuera efectivamente un elipsoide, $\frac{1}{305}$ convendría para toda su estension; pero en aquello no convienen los sabios. Mr. Francoeur, dice: “Estas discordancias, que no admiten duda, resultan de varias causas: 1.º las atracciones locales pueden hacer desviar los niveles, y dar latitudes defectuosas; 2.º pueden tener algunas inexactitudes las observaciones; 3.º pueden no ser elípticos los meridianos; 4.º no ser circulares los paralelos; y finalmente, puede ser la tierra un esferoide irregular.”

INDICE.

	<u>Páginas.</u>
Advertencia.....	3
CAPITULO I.—Sobre la forma y las dimensiones de la tierra.....	5
Introduccion.....	id.
Determinacion por medio del cálculo la forma que ha debido tomar la tierra en fuerza de la rotacion.....	15
Establecimiento de varias fórmulas relativas al esfe- roide terrestre.....	20
Determinacion de la grande y la pequeña normal.....	21
Demostracion del teorema, “el cuadrado de la esecn- tricidad es doble del aplanamiento”.....	24
Determinacion de un radio central.....	25
Determinacion de la subnormal, tangente y subtan- gente.....	27
Comparacion entre el radio y la grande normal de un punto de la superficie de la tierra.....	28
Relacion entre un radio de la tierra y el radio medio á 45° de latitud.....	29
Ecuaciones generales del radio de curvatura y de los	30.

	<i>Páginas.</i>
<i>radios vectores de cualquier punto de la tierra.....</i>	30
<i>Relacion entre los cosenos de la latitud geográfica y de la geocéntrica.....</i>	31
<i>Valor del ángulo que la vertical de un punto forma con el radio.....</i>	32
<i>Determinacion de un arco pequeño de meridiano.....</i>	id
<i>Conociendo un arco de meridiano determinar el aplanamiento.....</i>	34
<i>Fórmula para calcular el radio del ecuador.....</i>	37
<i>Tabla de las operaciones ejecutadas en diferentes países para determinar el aplanamiento.....</i>	39
<i>Fórmulas para encontrar la superficie de un cuadrílatro esférico, de una zona y de la esfera.....</i>	40
CAPITULO II.—Idea en general de las operaciones geodésicas, medicion de bases y establecimiento de señales.....	44
<i>De las bases.....</i>	46
<i>Arreglo de la unidad de medida lineal que ha de servir para determinar la estension de las reglas.....</i>	48
<i>Fórmulas de Mr. de Salneuve para corregir una base medida con reglas de metal.....</i>	50
<i>Conociendo la inclinacion de las reglas reducirlas á la línea horizontal.....</i>	55
<i>Operaciones que se practican cuando las localidades de un país no permiten medir una base en línea recta.....</i>	58
<i>Reduccion de la base al nivel del Océano.....</i>	60
<i>De las señales.....</i>	62
<i>Cálculo para conocer si las señales se proyectan en el cielo ó sobre la tierra.....</i>	64
<i>Altura que deben tener las señales.....</i>	65
<i>Circunstancias que deben tener los triángulos para</i>	

	<u>Páginas.</u>
<i>que resulten bien conformados.....</i>	id.
CAPITULO III.—De la observacion de los ángulos,	
<i>su reduccion al plano horizontal y al centro de es-</i>	
<i>tacion y de señal</i>	69
<i>Principios en que se funda la construccion del círcu-</i>	
<i>lo repetidor y manera de usarlo.....</i>	id.
<i>Reduccion de los ángulos al plano horizontal.....</i>	78
<i>Reduccion de los ángulos al centro de estacion.....</i>	82
<i>Correccion del error de face de la señal.....</i>	88
CAPITULO IV.—Resolucion de los triángulos.....	90
<i>Reduccion de los triángulos esféricos á los que forman</i>	
<i>las respectivas cuerdas de los arcos.....</i>	91
<i>Eseso esférico de Delambre.....</i>	92
<i>Resolucion de los triángulos considerándolos como es-</i>	
<i>féricos</i>	97
<i>Teorema de Legendre y modo de resolver los triángu-</i>	
<i>los haciendo uso de él.....</i>	98
CAPITULO V.—De la meridiana terrestre y de	
<i>sus perpendiculares; de las latitudes, longitudes y</i>	
<i>azimutes de los vértices de los triángulos.....</i>	106
<i>Trazado y medida de la meridiana.....</i>	id.
<i>De las coordenadas geográficas.....</i>	109
<i>De las latitudes.....</i>	113
<i>De las longitudes.....</i>	118
<i>De los azimutes.....</i>	120
CAPITULO VI.—De las variaciones de las coorde-	
<i>nadas y azimutes, medios indirectos para situar los</i>	
<i>lugares, y de la línea geodésica.....</i>	124
<i>Variacion de las coordenadas y azimutes de los vérti-</i>	
<i>ces de una cadena cuando varía el azimut de una</i>	
<i>estacion</i>	id.
<i>Razon entre la variacion del azimut de partida y la</i>	

	<i>Pá.inas.</i>
<i>de longitud de un vértice cualquiera de una cadena de triángulos.....</i>	128
<i>Correccion que debe hacerse á las posiciones de todos los puntos de una carta geográfica cuando varían la longitud y latitud del punto principal.....</i>	129
<i>Fórmula para corregir los lados de una cadena de triángulos cuando la base haya sufrido una pequeña variacion.....</i>	132
<i>Situar un punto conociendo la posicion de otros tres...</i>	133
<i>Situar un punto conociendo el azimut de otro y la latitud del lugar.....</i>	136
<i>Dadas las coordenadas geográficas de dos puntos determinar la línea geodésica ó la mas corta distancia entre ambos puntos reducida al nivel del mar...</i>	137
CAPITULO VII.—De las nivelaciones por distancias zenitales	
<i>Determinar la diferencia de nivel entre dos puntos por una sola distancia zenital.....</i>	142
<i>Determinar el coeficiente de refraccion.....</i>	143
<i>Determinar la diferencia de nivel por dos distancias zenitales simultáneas.....</i>	148
<i>Calcular la altura absoluta de un punto cuando desde él se descubre el horizonte del mar.....</i>	152
CAPITULO VIII.—De las nivelaciones por medio del barómetro.....	
	157
PARTE PRIMERA.—Establecimiento de la fórmula para obtener la diferencia de nivel entre dos estaciones por observaciones barométricas y termométricas comparativas hechas en las dos estaciones.	
	id.
<i>Determinar el coeficiente de la fórmula barométrica..</i>	162
<i>Cálculo del aplanamiento conociendo el peso específi-</i>	

	<u>Páginas.</u>
<i>co del mercurio por experimentos directos en dos lugares de latitudes diferentes.....</i>	165
<i>Tabla de los valores del coeficiente barométrico á diferentes latitudes.....</i>	167
<i>Otro método para determinar el coeficiente.....</i>	168
<i>Correcciones que deben hacerse á la fórmula por efecto de la dilatacion del mercurio, y por la variacion que tiene el coeficiente á diferentes alturas relativa á la variacion de la pesantez.....</i>	169
PARTE SEGUNDA.—Método para encontrar la diferencia de nivel cuando no se pueden obtener observaciones comparativas de las dos estaciones.....	175
<i>Caso primero. Cuando se conocen b' y t'.....</i>	177
<i>Caso segundo. Cuando se conocen b' y t.....</i>	178
<i>Caso tercero. Cuando t' es negativa y se conocen exactamente b y b'.....</i>	179
<i>Formacion de una tabla para determinar las alturas por medio del barómetro, que no requiere sino operaciones muy sencillas de aritmética.....</i>	180
<i>Uso de la misma tabla.....</i>	183
<i>Modo de calcular directamente la diferencia entre dos estaciones despues de haber hecho correspondientes los números de las mismas estaciones con los del nivel del mar.....</i>	187
<i>Correccion de las columnas barométricas por efecto de la capilaridad.....</i>	191
<i>Correccion que debe hacerse en las temperaturas indicadas por los termómetros fijos en las armaduras de los barómetros.....</i>	193
<i>Indicaciones generales de Mr. Ramond sobre el grado de precision que se puede esperar de las medidas</i>	

	<u>Páginas</u>
<i>barométricas segun los diversos estados de la atmósfera.....</i>	194
<i>Tabla para medir alturas por medio del barómetro....</i>	196
CAPITULO IX.—De las proyecciones.....	202
PARTE PRIMERA.—Proyecciones estereográficas.....	203
<i>Proyeccion polar ó sobre el ecuador.....</i>	<i>204</i>
<i>Proyeccion sobre el meridiano.....</i>	<i>205</i>
<i>Proyeccion sobre el horizonte.....</i>	<i>206</i>
<i>Determinar analíticamente los valores de algunas líneas para trazar las proyecciones estereográficas..</i>	<i>208</i>
<i>Determinar los radios de los paralelos en la proyeccion polar.....</i>	<i>210</i>
<i>Proyeccion de Lorgna.....</i>	<i>211</i>
<i>Determinar en la proyeccion sobre el meridiano los radios de los paralelos y de los meridianos.....</i>	<i>213</i>
<i>En la proyeccion sobre el horizonte determinar las distancias de los centros y los radios de los paralelos..</i>	<i>216</i>
<i>Trazar gráficamente un arco de círculo de radio demasiado grande valiéndose de la propiedad del ángulo inscrito.....</i>	<i>217</i>
PARTE SEGUNDA.—Proyecciones ortográficas.....	218
<i>Proyeccion sobre el ecuador.....</i>	<i>id.</i>
<i>Proyeccion sobre el meridiano.....</i>	<i>219</i>
<i>Proyeccion sobre el horizonte.....</i>	<i>id.</i>
PARTE TERCERA.—De las cartas.....	id.
<i>Cartas planas.....</i>	<i>220</i>
<i>Cartas reducidas.....</i>	<i>221</i>
<i>Cartas cónicas.....</i>	<i>223</i>
<i>Proyeccion de Flamsteed.....</i>	<i>229</i>
<i>Proyeccion francesa.....</i>	<i>230</i>

ERRATAS.

Págs.	Líneas.	Dice.	Debe decir.
6	24	con el supuesto	en el supuesto
14	10	eliminar	eliminar
25	12	$R^2 = \frac{a^4 \cos^2 L + b^4 \operatorname{sen} L}{a^2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)}$	$R^2 = \frac{a^4 \cos^2 L + b^4 \operatorname{sen}^2 L}{a^2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)}$
29	11	$\frac{a^2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)}{a^2(1 - \frac{e^2}{2})} =$	$\frac{a^2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)}{a^2(1 - \frac{e^2}{2})} =$
32	3	M C E	M C F
36	6	0,4771213	0,4771212
id.	7	6.0462283	5.0472281
id.	8	5.4470605	5.4480604
id.	id.	279937	280582
id.	10	id.	id.
id.	id.	319.7	320.5
42	1	6.366666	3.366666
49	22	ó temperatura	á temperatura
55	28	$r = (1 - \cos i)$	$r [1 - \cos i]$
57	4	$r - x = \frac{r}{2} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen}^2 1'$	$r - x = \frac{r}{2} \frac{i^2}{i^2} \operatorname{sen}^2 1'$
id.	18	0.000076154	0,0000076154
58	4	eoso	caso
id.	15	c	C
72	4	fig. 8	fig. 9
82	2	65° 18' 14"	65° 18' 40"
83	4	T, C S'	T, C, S,
91	14	I L O, I G H	i LO, i GH
id.	15	IL : LO :: IG : GH	iL : LO :: iG : GH
94	11	$\left(\frac{a - b}{1}\right)$	$\left(\frac{a - b}{2}\right)$
99	5	$\alpha^4 - \beta^4 \gamma^4$	$\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4$

<u>Págs.</u>	<u>Lineas.</u>	<u>Dica</u>	<u>Debe decir.</u>
104	14	179° 58' 59'', 443	179° 58' 59'', 433
109	1	es Legendre	es de Legendre
111	25	E <i>c</i>	E
id.	id.	<i>c'</i> E	<i>c'</i> E
id.	30	se termina	se determina
114	10	— sen <i>a</i> sen <i>x</i>	— sen <i>pa</i> sen <i>x</i>
119	9	eos L	eos L'
131	2	sen <i>b</i> eos C	sen <i>b</i> sen C
147	6	R ² ($\frac{1}{2} - m$)	K ² ($\frac{1}{2} - m$)
id.	11	en partes	en países
155	14	2.8833337	2.8333337
165	8	sen ² L = $\frac{1}{2} c^2 \text{sen}^2 L$	sen ² L = $\frac{1}{2}$, $c^2 \text{sen}^2 L$
168	20	0. ^m 10461	0. ^m 10467
173	13	Mr. Francœur	—159, Mr. Francœur
196	15 col. 5 ^a	1261.094	1261,904
200	8 col. 3 ^a	11.489	11,849
211	19	ángulos	ánulos
212	2	r_2^2	r^2
226	última está		estaba
231	9	de paralelos	de los paralelos

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 9.

Fig. 43.

Fig. 41.

Fig. 45.

Fig. 44.

Fig. 46.

Fig. 47.

Fig. 48.

Fig. 49.

Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 52.

Fig. 53.

Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 40

Fig. 42.

UNAM

FECHA DE DEVOLUCIÓN

El lector se obliga a devolver este libro antes
del vencimiento de préstamo señalado por el
último sello

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO