Vorträge.

Über die Schwingungen gespannter Saiten.

Von dem w. M. Prof. J. Petzval.

(Auszug aus einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung.)

Nicht leicht hat jemals ein kleiner, anscheinend vielleicht ziemlich unbedeutender mathematischer Fund dem Finder so viel Vergnügen gemacht, als derjenige, auf welchen ich im Verlaufe der jüngst verflossenen Herbstferien zu stossen so glücklich war. Es ist mir nämlich gelungen, eine unabhängige, von allen hypothetischen Voraussetzungen völlig freie Behandlung des Reflexionsproblemes in der Undulationstheorie aufzufinden. Die besondere Befriedigung aber, die ich bei diesem vielleicht etwas unscheinbaren Ergebnisse meiner Mühen empfand, hat einen doppelten Grund, nämlich: erstens weil hiedurch die klaffendste Lücke in meinen Untersuchungen auf dem Gebiete der Undulationstheorie ausgefüllt erschien, und zweitens weil das von mir in Anwendung gesetzte Hilfsmittel auch bei anderen mathematischen Untersuchungen dieser Art anwendbar und nützlich, eine wesentliche Bereicherung des bekanntlich ziemlich armen Lexikons der mathematischen Sprache zu werden verspricht.

Die Zahl der Bearbeiter der Undulationstheorie ist eine sehr bedeutende, allein beinahe ohne Ausnahme sind ihre sämmtlichen Arbeiten reich ausgestattet mit theils klar ausgesprochenen, theils stillschweigend in die Rechnungen niedergelegten Voraussetzungen und Ansichten aller Art, und es hat bisher an einem Bearbeiter dieses interessanten Gegenstandes gefehlt, der, gegen diese Bestrebungen wissenschaftliche Opposition machend, in seinen Untersuchungen ausgeht, wo möglich, von gar keiner Hypothese, sondern von den unbestreitbarsten Thatsachen der Erfahrung, und dies zwar selbst auf die Gefahr hin, trotz aller angewandten Mühen auf dem mit Schwierigkeiten übersäeten Terrain nicht weiter zu kommen. Ich habe mich also und zwar schon seit vielen Jahren bemüht, diese Rolle zu übernehmen, ohne sogleich die gelehrte Welt, wie dies jetzt leider nur zu gewöhnlich ist, von Bestrebungen in Kenntniss zu setzen, von denen es noch ungewiss war, ob sie Früchte bringen würden, oder nicht. Anfangs geschah dies auch mit wenigem Glücke, später jedoch habe ich Fortschritte gemacht, die ich der Aufmerksamkeit des wissenschaftlichen Publicums werth halte. Unter diesen befindet sich auch die unabhängige Behandlung des Reflexionsproblemes, und sie ist es gerade, von der ich vor allem anderen die gelehrte Welt in Kenntniss zu setzen wünsche, weil ich glaube, dass es geeignetere mit Gegenständen optischer Natur, z. B. Krystallen mit einer oder mit zwei optischen Axen, schillernden Flächen u. s. w. experimentell viel vertrautere Kräfte gibt, von denen sich daher nicht nur eine völlige Ausbildung meiner Methode, sondern auch mancher wichtige Aufschluss über den Verlauf und die Ursachen interessanter Naturerscheinungen erwarten lässt von der Art derjenigen, auf die Haidinger uns zu wiederholten Malen aufmerksam gemacht hat. Ich beabsichtige also, meine Methode, die ich völlig auszubilden weder die Zeit, noch auch die gehörigen Erfahrungen zu haben glaube, in demjenigen Zustande der Abrundung, in welchem sie der Mathematiker geben kann, der specieller Physiker gar nicht einmal sein will, zu veröffentlichen und thue dies gegenwärtig zunächst in Bezug auf das allereinfachste denkbare Reflexionsproblem, wie es vorkommt bei den Schwingungen solcher gespannter Saiten, die aus ungleichartigen Theilen von verschiedener Masse zusammengeknüpft sind. Zunächst soll dann darauf das Reflexionsproblem der Lichtwellen folgen, welches ich bereits unter der Feder habe, allein nur an den Trennungsflächen solcher Medien, die mich als praktischen Optiker vorzugsweise interessiren, mit gleicher Elasticität nämlich nach allen Seiten. Die Ausbildung der Methode auch für die anderen complicirteren Fälle krystallinischer Substanzen erwarte ich von jüngeren Kräften, an denen bekanntlich hier gerade auf diesem Felde kein Mangel ist, indem ich hiemit darauf Verzicht leiste.

Unsere Mathematik, die in ihrer neuen Gestalt die jedermänniglich wohlbekannten grossen Erfolge auf dem Gebiete der Naturwissenschaften errungen hat, ist kaum zwei Jahrhunderte alt, und man könnte beinahe sagen, sie sei annoch in der Kindheit, in der Periode des unbehilflichen Lallens. In der That ist dasjenige, was wir in die Sprache der Analysis zu übersetzen vermögen, annoch sehr wenig, vielleicht, weil wir bisher zu einem solchen Zwecke beinahe keine anderen, als algebraische Functionen und solche, die durch aufsteigende Reihenentwickelung mit algebraischen Functionen, d. h. Potenzen in Verbindung gebracht werden konnten, verwendet haben, Functionen, die gerade am allerseltensten Repräsentation in der Natur finden, allwo man vielmehr andere gewahr wird, die zwar sehr leicht geometrisch construirt vor das Auge des Geistes treten, aber schwer oder gar nicht durch algebraische und durch diejenigen transcendenten Functionen auszudrücken sind, die im allgemeinen mathematischen Gebrauche stehen. Es ist z. B. gar nicht lange her, dass die Mathematik gar nicht zu sagen wusste: in einem von einer gewissen krummen Fläche, einer sphärischen, z. B. eingeschlossenen Raume findet etwas Statt, was hier mit A bezeichnet werden soll, sei es dass dies besonderen Stoff oder Dichte, Wirkungskreis u. s. w. andeutet. Jetzt kennen wir einige hiezu dienliche analytische Hilfsmittel. Der vorgelegte Satz lässt sich z. B. mathematisch in einer nur dem Eingeweihten zugängigen hieroglyphischen Schreibweise ausdrücken, wie folgt:

$$\frac{2A}{\pi}\int_0^\infty \sin u\, r^2 \cos u\,(x^2+y^2+z^2)\,\frac{du}{u}.$$

Das bestimmte Integral nämlich in diesem Ausdrucke hat die besondere Eigenschaft, den Werth $\frac{\pi}{2}$ zu besitzen, wenn $r^2 > x^2+y^2+z^2$ ist, mithin an allen Orten im Innern eines kugelförmigen Raumes, dessen Oberfläche mit dem Halbmesser r um den Anfangspunkt der Coordinaten herum beschrieben erscheint, und alsogleich in Null zu übergehen, wenn $r^2 < x^2+y^2+z^2$ wird, also in allen Punkten ausserhalb dieser sphärischen Fläche. Es besagt mithin dieser Ausdruck, dass innerhalb der Kugel überall A sei, ausserhalb aber Nichts. Lejeune-Dirichlet hat von diesem merkwürdigen bestimmten Integrale bei der Attraction der Sphäroide einen sehr eleganten Gebrauch gemacht.

Die bekannte Fourier'sche Formel gibt ein zweites Mittel an die Hand, solche Unstetigkeiten, die allenthalben in der Natur vorhanden sind, und bildlich sehr leicht dargestellt werden können, auch in der mathematischen Sprache auszudrücken. Endlich hat Libri zu demselben Zwecke die der dritten Classe angehörige Function 0^{0^x} vorgeschlagen. Sie hat die Eigenschaft, beständig gleich Null zu sein für negative x und in Eins überzugehen für positive Werthe dieser Veränderlichen. Gleichwie mithin der obangeführte mathematische Hieroglyphe zu deutsch eine Kugel heisst, so würde der folgende andere:

$$\frac{2A}{\pi} \, 0^{0^x} \int_0^\infty \sin r^2 u \cos u \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \frac{du}{u}$$

eine Halbkugel bedeuten in mathematischer Ausdrucksweise.

Also an Hilfsmitteln Mannigfaltiges, wenn auch nicht alles Mögliche auszudrücken, kann man wohl die mathematische Sprache geradezu nicht arm nennen, allein es ist nicht genug ein Wort zu haben zur Bezeichnung eines Begriffes, man muss auch aus Worten Sätze und aus Sätzen eine zusammenhängende sinnige Rede bilden können. Dann hat man erst die Sprache in seiner Gewalt und so verhält sich die Sache auch hier. Es ist nicht genug, die Fourier-sche Formel, das vorliegende bestimmte Integral, die Exponentialgrösse dritter Classe Libri's u. s. w. zu kennen, man muss auch damit rechnen können und namentlich ist es nothwendig, Differentialgleichungen, in deren Coëfficienten diese unstetigen analytischen Gebilde erscheinen, integriren zu können, denn man denke sich eine solche Differentialgleichung als Repräsentanten eines Schwingungsproblemes, wo unter anderem auch gefragt werden soll, nach welchen Gesetzen die Undulationen aus einem Mittel in ein anderes, davon verschiedenes und durch eine Trennungsfläche oder Trennungsschichte getrenntes übergehen. Solche zwei Medien unterscheiden sich nur in den Werthen der Coëfficienten der Differentialgleichung, welche mithin an einer Trennungsfläche plötzlich einen Sprung machen, der analytisch nicht gut anders wiedergegeben werden kann, als durch die genannten Hilfsmittel, wenn man davon nur den gehörigen Gebrauch zu machen wüsste, d. h. wenn man nur Differentialgleichungen mit solchen unstetigen Functionen zu integriren vermöchte. Allein dies war bisher die grosse Schwierigkeit; mit einem beinahe masslosen Respecte hat der Analyst der vergangenen Zeiten auch nur diejenigen Differentialgleichungen angesehen, deren Coëfficienten geschlossene algebraische Polynome waren. Vor 0^{0^x} würde er vermuthlich als vor einem hoffnungslosen Gebilde umgekehrt sein. Und doch braucht man, wenn man gehörig vertraut ist mit den Vorschriften der Formenlehre der linearen Differentialgleichungen, die ich im ersten Bande meines Werkes entwickelt habe, beinahe nichts mehr, als die Scheu vor den variablen Coëfficienten abzulegen, um alsbald auch zur Erledigung solcher Schwingungsprobleme den Weg gebahnt zu sehen. In der That ist die Methode, die ich gegenwärtig vorlege, das Schwingungsproblem zu behandeln, eine dermassen einfache und nicht einmal aus den tieferen Tiefen der Theorie der Differentialgleichungen geholte, so dass sie selbst von demjenigen Leser verstanden werden wird, der mein Werk gar nicht kennt, und doch hat sie in demselben ihre Wurzel, weil die alldort erschöpfte Bekanntschaft mit den linearen Differentialgleichungen zu einer gewissen Zuversicht führt, wie sie der erfahrene General besitzen dürfte, der dem Feinde schon in zu vielen verschiedenen Formen begegnet ist, um mehr in irgend einer, wenn auch ganz neuen Gestalt die Berührung mit demselben zu scheuen.

Das Reflexionsproblem in der Gestalt, die es bisher getragen hat, steht in einem gewissen Sinne einstweilen noch auf dem Boden der Emanationslehre. In der That, wenn man das Licht auffasst als Stoff, so kann offenbar, weil die Materie nie vernichtet wird, davon unter keinerlei Umständen etwas verloren gehen, mithin wird das reflectirte mehr dem gebrochenen Lichte gleich dem einfallenden sein. Die fortgeschrittene Wissenschaft ist nun genöthigt, diese Anschauungsweise aufzugeben, und das Licht als Zustand aufzufassen. Als solcher ist es aber etwas Vergängliches und man kann mindestens ohne gründlichen Beweis nicht voraussetzen, dass daran irgend etwas erhalten werde. Gleichwohl frägt der in den alten Begriffen der Emanationslehre noch befangene wissenschaftliche Verstand nach Demjenigen in der Reflexionserscheinung, welches nunmehr die Rolle spielen kann des unvergänglichen Stoffes und findet Mancherlei: Einmal ist es nämlich die Summe der Producte aus der Masse in die Quadrate der Schwingungsamplituden, das andere Mal das Arbeitsquantum, und es ist schon *a priori* klar, dass sich mehrere solche Dinge werden entdecken lassen schon aus der Ursache, weil der analytische Ausdruck der Erscheinung in der Regel mehrere Constante in sich schliessen wird.

Allein der strenge und vorsichtige Wissenschaftsforscher kann sich mit einer solchen Behandlung physicalisch-mathematischer Probleme nie befreunden. Er sucht vielmehr in ihnen nur einen logischen Trugschluss, einen sogenannten *Circulus vitiosus*, dessen allgemeine Form die folgende ist: Ich setze voraus, die Reflexionserscheinung finde so Statt, wie sie wirklich stattfindet, so findet sie auch wirklich so Statt, wie sie stattfindet, nur wird der Vordersatz mathematisch, der Nachsatz aber deutsch ausgedrückt. Hierzu kommt noch, dass bei einer solchen Behandlung physicalischer Probleme die festgestellten Begriffe von lebendiger Kraft, Arbeitsquantum u. s. w. verfälscht werden, was an und für sich übel genug ist. Das Schlimmste aber ist, dass man wirklich eine Theorie der Reflexion zu haben glaubt, und in diesem Wahne das Streben nach einer neuen befriedigenderen solchen unterlässt, somit wenn auch nicht gerade Irrthümern anheimfällt, doch wenigstens aller Aufschlüsse über den Einfluss der Beschaffenheit der Trennungsfläche, Dicke der Trennungsschichte u. s. w. auf die Gesetze der Reflexion, die eine gründliche Theorie gebracht hätte, verlustig wird. Gleichwohl glaube ich nicht, dass Jemand das Recht hätte diese Übelstände der Undulationstheorie zu rügen, wenn er nicht auch zugleich vermöchte etwas anderes Befriedigenderes an ihre Stelle zu setzen. Ich glaube, dass den von mir erzielten Ergebnissen etwas Solches mit der Zeit entkeimen wird.

Meine gegenwärtigen Betrachtungen gelten den Schwingungen einer gespannten Saite, die aus zwei oder auch aus mehreren ungleich starken Stücken zusammengefügt ist, namentlich setze ich vorerst zwei solche durch den Anfangspunkt der Coordinaten von einander getrennte, gleiche Spannung S, aber verschiedene Massen m und M besitzende Fadenstücke voraus und zwar zuvörderst in unbegrenzter, dann aber auch in begrenzter Ausdehnung. Die unstetig variable Masse eines solchen linearen Systemes, die auf die Längeneinheit bezogen den Werth m hat für negative x und den Werth M für positive solche, drücke ich durch die Exponentielle L i b r i's aus, indem ich sage: Die variable Masse μ der Längeneinheit ist gegeben durch eine Formel, wie:

$$\mu = m + o^{o^x}(M - m).$$

Hiemit soll nicht gesagt werden, dass nur diese Exponentielle als das einzige, oder auch nur als das passendste Mittel zu diesem Zwecke erscheine; es ist nur dasjenige, zu welchem ich zuerst gegriffen habe, und ich zweifle keinen Augenblick daran, dass auch andere analytische Hilfsmittel dieser Art auf dieselbe Weise zum Ziele führen werden. Ausser dieser in der Natur der Sache liegenden Voraussetzung, die man natürlich keine Hypothese nennen kann, wird im ganzen Verlaufe der Rechnung durchaus nichts Hypothetisches angenommen. Gleichwohl führt sie zu Formeln, die den vollständigen Verlauf der Reflexionserscheinung in einer sehr befriedigenden Weise enthalten. Es sei mir erlaubt, Einiges von den Ergebnissen des Calculs hier anzuführen.

Unter der Voraussetzung einer unbegrenzten Ausdehnung der Saite integrire ich zuvörderst mit trigonometrischen Functionen *sinus* und *cosinus*, finde den Gebrauch imaginärer Coëfficientenwerthe zur Darstellung der einfachsten Form des Integrales nothwendig, und erziele daraus ein allgemeineres Integral mit willkürlichen Functionen bestimmter Grundgrössen. Die Untersuchung desselben gibt die einfallende, die dem anderen Saitenstücke sich mittheilende gleichsam gebrochene, und die reflectirte Welle.

Es kommt nun bei den erhaltenen Formen darauf an, ob die Bewegung aus dem schwächeren Saitenende in das stärkere übergeht, oder umgekehrt. Im ersten Falle sind die einfallende und reflectirte Welle einander der Lage nach entgegengesetzt, d. h. wenn eine von ihnen aufrecht ist, so ist die andere verkehrt; im zweiten Falle stimmen sie der Lage nach überein.

Die Höhen der drei zu einander gehörigen Wellen, der einfallenden, reflectirten und gebrochenen nämlich, stehen zu einander im Verhältnisse der Grössen:

$$k+h,\; k-h,\; 2h$$

allwo $h = \sqrt{\frac{m}{S}}$, $k = \sqrt{\frac{M}{S}}$ ist. Zugleich sind $\frac{1}{h}$ und $\frac{1}{k}$ die Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten an dem einen und an dem anderen Saitenende, denen auch die Wellenlängen proportional sind. Würde man hier auf Grundlage dieser Ergebnisse der Rechnung nach Demjenigen, was bei der Bewegung conservirt wird, fragen, so liesse sich mancherlei dieser Art aufzählen: Namentlich ist erstens nach der Reflexion die Summe der Wellenhöhen zu beiden Seiten des reflectirenden Trennungspunktes dieselbe und gleich $2h$ oder mindestens dem $2h$ proportional; zweitens: findet man sich veranlasst, die reflectirte und gebrochene Welle als dasjenige anzusehen, was aus der einfallenden entstanden ist, und analog mit den Voraussetzungen in der Theorie des Lichtes zu untersuchen, ob die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der Schwingungsamplituden hier dasjenige sei, was sich erhält, so überzeugt man sich sehr bald vom Gegentheile; wohl aber hat die Summe der Producte aus den Quadratwurzeln der Massen in die Quadrate der Schwingungsamplituden einen constanten Werth. Ich glaube, der Umstand, dass einmal wie bei der Theorie des Lichtes die Massen selbst, ein anderes Mal, wie in einem linearen Systeme die Quadratwurzeln der Massen in dem Ausdrucke desjenigen vorkommen, was bei der Bewegung conservirt wird, genügt vollkommen, das Unzulässige solcher analytischer Voraussetzungen zu beweisen, und es wird wohl kaum Jemand *a priori* und ohne regelrecht durchgeführter oder wenigstens eingeleiteter Rechnung anzugeben vermögen, was dasjenige sei, das bei der Reflexion in solchen materiellen Systemen erhalten wird, die sich in einer Ebene oder in einer krummen Fläche ausdehnen. Es kann noch hinzugefügt werden, dass gleichwohl die Schwingungsintensitäten der einfallenden und reflectirten Welle, definirt wie in der Lichtlehre als Producte aus den Massen in die Quadrate der Schwingungsamplituden, durch dieselbe Formel, wie dort, zusammenhängen. Ist nämlich die erstere J, die letztere J', so hat man:

$$J' = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 J,$$

eine Formel die für die Intensität des reflectirten Lichtes unter senkrechter Incidenz bekannt ist.

Ich gehe jetzt über zu einem anderen, etwas complicirteren Falle, demjenigen nämlich, in welchem das lineare System zusammengesetzt ist aus drei verschiedenen Stücken, nämlich aus einem von $x = -\infty$ bis $x = 0$ ausgedehnten Stücke mit der Masse m der Längeneinheit; das zweite soll sich von $x = 0$ bis $x = a$ ausdehnen und eine andere auf die Längeneinheit bezogene Masse M besitzen; das dritte dehnt sich endlich von $x = a$ bis $x = \infty$ aus und besitzt abermals die auf die Längeneinheit bezogenen Masse m. Dieser Fall schien desshalb interessant, weil er mir die Mehrzahl der in der Natur vorkommenden Fälle, der an zwei Punkten befestigter gespannter Saiten, Seile, Ketten etc. in sich zu begreifen scheint. Ein in aller Strenge fester Punkt ist nämlich nur eine mathematische

Fiction und eine praktische Unmöglichkeit und man erzielt denselben in der Regel nur annäherungsweise, indem man ein materielles System von geringerer Masse, die gespannte Saite z. B. an irgend zwei Stellen mit grösseren und desshalb unbeweglicheren Massen in Verbindung bringt. Die Analysis lehrt nun das was auch mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmt: Die Bewegung wird von dem mittleren Saitentheile, das die Länge a hat, allmählich auf die beiden äussersten übertragen und verschwindet mit der Zeit in diesem mittleren Bestandtheile gänzlich. Dies geschieht sehr rasch, wenn das mittlere Endenstück von nahezu gleicher Masse ist, und sehr langsam, wenn das Umgekehrte stattfindet. Eine einzige Welle, die ursprünglich erregte, theilt sich bei einer solchen Übertragung der schwingenden Bewegung in drei Wellenzüge. Das mittlere Fadenstück beherbergt nämlich jederzeit nur eine einzige an demselben hin- und herlaufende Welle. Ihre Höhe nimmt nach jeder Reflexion ab, und man hat alldort die folgenden Wellenhöhen vor der ersten, zweiten, dritten, vierten u. s. w. Reflexion:

$$\frac{2h}{k+h}G, \quad \frac{2h(k-h)}{(k+h)^2}G, \quad \frac{2h(k-h)^2}{(k+h)^3}G, \quad \frac{2h(k-h)^3}{(k+h)^4}G, \quad \ldots \quad ..$$

Während auf diese Weise das Mittelstück nur eine einzige mit der Zeit völlig erlöschende Bewegung ausweist, eilen in den beiden übrigen Fadenstücken vom Punkte $x = 0$ gegen das negative Ende der Abscissenaxe zu und vom Punkte $x = a$ gegen das positive Ende, ganze Züge von Wellen mit gleicher Länge und abnehmender Höhe einander nach. Die einzelnen Höhen bilden auf der Seite der negativen x folgende Reihe:

$$-\frac{k-h}{k+h}G, \quad \frac{4hk(k-h)}{(k+h)^3}G, \quad \frac{4hk(k-h)^3}{(k+h)^5}G, \ldots\ldots$$

auf der Seite der positiven x hingegen folgende andere:

$$\frac{4hk}{(k+h)^2}G, \quad \frac{4hk(k-h)^2}{(k+h)^4}G, \quad \frac{4hk(k-h)^4}{(k+h)^6}G, \ldots\ldots$$

Hier bedeutet G die Höhe der einen ursprünglich erregten Welle, die sich dann mit der Zeit in die unzähligen anderen getheilt hat.

Nachdem ich auf diese Weise in den Vorgang der Reflexionserscheinung vollständig Einsicht gewonnen, gehe ich über zur

Untersuchung der Schwingungsweisen, die ein beiderseits begrenztes von $x = -l$ bis $x = \lambda$ reichendes System dieser Art aus zwei heterogenen Theilen zusammengesetzt annehmen kann und den Tönen, die es zu schwingen vermag. Sie zerfallen in zwei Sorten, nämlich erstens Schwingungen, deren ein jeder Bestandtheil des Systemes für sich fähig ist, die mithin auch das ganze annehmen kann, wobei immer der Trennungspunkt ein Schwingungsknoten ist. Sie sind die wohlbekannten, einer Saite von gleicher Dicke entsprechenden und die neue Analysis bestimmt an ihnen nichts, was man nicht schon gewusst hätte, ausser den Amplituden. Allein es gibt auch zweitens Schwingungsweisen anderer Art, die einem solchen heterogenen Systeme als Ganzem zukommen, entsprechend tieferen Tönen. Hier führt die neue Analysis zu besonders merkwürdigen, nicht leicht früher geahnten Ergebnissen, nämlich ein solches System kann zwar mehrere Töne schwingen, die in einem gewissen Schwingungsverhältnisse zu dem tiefsten Grundtone stehen. Sie kommen in der Regel der Octave, Terz, Quint u. s. w. nahe, ohne ihnen in aller Strenge zu gleichen. Ein Musiker würde sagen, eine solche Saite gebe falsche Octaven, Terzen, Quinten u. s. w., allein dies mit Ausnahme eines einzigen speciellen Falles, wenn nämlich die Längenprofile der beiden Saitenstücke ihrem Flächeninhalte nach mit den Quadratwurzeln der Dichten multiplicirt entweder einander gleich, oder mindestens commensurabel sind. Dann kann eine solche Saite zu dem tiefsten Grundtone auch die damit consonirende Terz, Quinte u. s. w. geben, nur die consonanteste aller Consonanzen, die Octave nämlich, und zwar die erste, zweite, dritte u. s. w. zu diesem tiefsten Grundtone bleibt immer ausgeschlossen. Ich glaube, dass dieses Ergebniss des Calculs der Bestätigung mittelst eines Experimentes würdig wäre, nur müsste sich dazu ein mit sehr feinen musikalischen Gehörwerkzeugen ausgerüsteter Experimentator finden. Ich glaube, dass man mit der vollsten Zuversicht der allergenauesten Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment entgegensehen könnte, weil sich in der ganzen Theorie gespannter Saiten auch nicht die allergeringste zweifelhafte Annahme findet und weil auch die Rechnung namentlich Integration der Differentialgleichung nichts in sich enthält, was sich in irgend einer Weise beanständen liesse. Gleichwohl halte ich den Versuch nicht für überflüssig aus dem Grunde, weil nicht bei allen Verehrern der Wissenschaft die blos auf mathematische Gründe gestützte Überzeugung so fest zu wurzeln vermag, wie bei Jemanden, der täglich mit dieser Wissenschaft beschäftigt ist, und weil die richtigen Ergebnisse einer analytischen Methode in etlichen Fällen, die keinen Zweifel zulassen, das Zutrauen zu derselben befestigen kann in anderen Fällen, die mehr von ungerechtfertigten Hypothesen durchzogen sind, z. B. in der Theorie des Lichtes.

Indem ich diesen Beitrag zur Theorie der Schwingungen gespannter Saiten der Öffentlichkeit übergebe, habe ich einen dreifachen Zweck vor Augen, nämlich:

Erstens, ich wünsche vor allem andern eine befriedigendere Behandlung des Reflexionsproblemes und zwar vorzugsweise in der Theorie des Lichtes zu begründen und in der mathematischen Physik heimisch zu machen. Dies erscheint mir um so nothwendiger, als ich der Meinung bin, dass gegenwärtig nicht einmal das so sehr wichtige Sinusgesetz der Brechungen anders als experimentell bewiesen ist in der Optik und ich mir immerhin denken kann, dass es skrupelsüchtige Köpfe geben könne, die eben dieses Gesetz nicht für in aller Strenge, sondern nur annäherungsweise richtig zu halten geneigt sein könnten. Die Erledigung nun des Reflexionsproblemes in dem aller einfachsten Falle der Schwingungen gespannter Saiten soll als Vorbereitung dienen zu den complicirteren Fällen, denen man in der Undulationstheorie des Lichtes begegnet.

Zweitens. Ich wünsche die edleren mathematischen Kräfte, von denen manche nicht wissen dürften, was sie Verdienstliches thun sollen, und sich desshalb mit Ausserachtlassung des Studiums der Natur oft in ein leeres Formenwesen vertiefen, von welchem nie ein erheblicher Nutzen zu erwarten steht, aufmerksam zu machen auf das Studium derjenigen analytischen Formen, von welchen kurz zuvor die Rede war und die plötzliche Übergänge anzudeuten geeignet sind in der Körperwelt, die den Raum erfüllt, denn ich glaube, dass es jetzt an der Zeit sei, die Eigenschaften dieser Gebilde, die Functionsclasse, zu der sie gehören, ihre Verwandtschaften und Metamorphosen einer sorgfältigen Prüfung zu unterziehen, damit ihr Gebrauch im Gebiete der Mathematik wo möglich ein ebenso handsamer werde, als der der algebraischen und damit verwandten Functionen. Die Integration solcher Differentialgleichungen, die Coëfficienten von derlei Formen bergen, dürfte zu diesem Zwecke die passendsten Angriffspunkte bieten.

Drittens. Ich wünsche darauf hinzuweisen, dass die allermeisten Schwingungsprobleme, sowohl linear-materieller Systeme, gespannter Saiten, z. B. wie auch anderer längs einer Fläche sich ausdehnender, und den Raum theilweise ausfüllender, bisher nur erledigt seien in dem allereinfachsten denkbaren, rein hypothetischen, nirgends in der Natur wahrnehmbaren Falle, nämlich gleiche Dichte und Dimensionen, constante innere Spannung oder Druck und mithin völlige Abwesenheit aller beschleunigenden Kräfte, also auch der Schwere. An dieser Einseitigkeit dürften wohl die unzureichenden Kräfte der mathematischen Analysis, die nur Differentialgleichungen mit constanten Coëfficienten zu behandeln vermochte, bisher die Schuld getragen haben, und auch jetzt noch, wo wir über ausreichendere Hilfsmittel verfügen, bin ich der Überzeugung, dass die Betrachtung des allereinfachsten hypothetischen Falles, bevor man die verwickelteren in Angriff nimmt, der einzige richtige Weg sei, von welchem der Forscher nie wird ungestraft abgehen können; allein die Sache kann hiemit nicht als abgeschlossen betrachtet werden und es hat sich die Wissenschaft noch überdies die Aufgabe zu stellen, die störenden Wirkungen der anderen, nie fehlenden Ursachen anzugeben, die man in erster Annäherung ausser Acht gelassen hat. Die Wiederaufnahme sämmtlicher Schwingungsprobleme in diesem Sinne und mit den neueren Hilfsmitteln der Analysis schiene mir jetzt weit verdienstlicher, als das Schwelgen in undurchsichtigen Formen.

In der Vorrede zu dem ersten Bande meines Werkes über die Integration der linearen Differentialgleichungen habe ich eine Reihe einzelner Abhandlungen, die verschiedene, bisher noch unerörterte Schwingungsprobleme zum Gegenstande haben sollen, und wo lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Coëfficienten vorkommen, als Beispielsammlung versprochen, die dazu dienen soll, diesem neuen Werke Eingang zu verschaffen.

Ich wünschte sehr, dies wäre gegenwärtig überflüssig und es hätten bereits meine Schüler den Gegenstand in einer der Wissenschaft würdigen Weise in Angriff genommen. Zum Theile ist dies auch wirklich so, von anderer Seite jedoch gewahre ich zu meinem grossen Leidwesen, dass man auch falsche Wege einschlagen könne, ein Werk, welches aus den unablässigen Mühen von mehr als zwei Decennien hervorgegangen ist, zur Fabrication werthloser Aphorismen benützend. Vielleicht würde es wenig frommen, der Jugend zu wiederholten Malen zuzurufen: Haltet euch an das Studium der Natur, dem einzig und allein eine würdige Mathematik der Zukunft entkeimen kann, auf dass sie euch in eurer wissenschaftlichen Laufbahn immer leite an ihrer Hand, bis sie euch an ihr Herz nimmt. Erspriesslicher dürfte es vielleicht sein, zu zeigen, wenn auch nur in einer geringen Anzahl gewählter Beispiele, wie dies zu machen sei, und was eigentlich Noth thue, die verfehlten Bestrebungen hingegen die Rolle des abschreckenden Beispieles spielen zu lassen, als zeigend, wie man Wissenschaft nicht zu betreiben hat. Ich wünschte daher, dass meine gegenwärtigen Untersuchungen über das Reflexionsproblem betrachtet werden mögen als die erste der verheissenen Abhandlungen, der vielleicht noch einige andere folgen sollen. Lieber wäre es mir jedoch, wenn ich diese Fortsetzung auf andere jüngere Kräfte übertragen könnte.

Ich habe bisher immer die Gewohnheit gehabt, die Ergebnisse meiner Untersuchungen, so oft sie einfach genug waren, um sich für einen Schulvortrag zu eignen, meinen Schülern mitzutheilen, oft ein Decennium, bevor sie veröffentlicht wurden.

Ich finde auch jetzt noch keinen genügenden Grund, von dieser meiner Gewohnheit abzugehen und habe in der That das Reflexionsproblem zum Gegenstande meiner Verträge an der Universität erkiesen; da ich indessen meine Arbeit über diesen Gegenstand auch in weiteren Kreisen, und zwar so bald als möglich bekannt zu machen wünsche, so übergebe ich den ersten, die Schwingungen gespannter Saiten, die aus heterogenen Stücken zusammengesetzt sind, behandelnden Theil der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe zur Aufnahme in ihre Denkschriften.